USTL

Université des Sciences et Technologies de Lille

Math208 — Initiation à la modélisation mathématique
Corrigé du devoir surveillé de Décembre 2006

Exercice 1 : **Algorithme de Dijkstra**

a) On considère un graphe valué avec des poids positifs. On fixe un sommet $\overline{s}$. Dijkstra permet de déterminer les plus courts chemins entre le sommet $\overline{s}$ et tous les autres sommets. Pour chaque sommet k, l'algorithme de Dijkstra permet de calculer

$$\pi^*(k) = \min\{d(\gamma), \gamma \text{ chemin de } \overline{s} \text{ à } k\}$$

où $d(\gamma)$ désigne le poids du chemin γ.

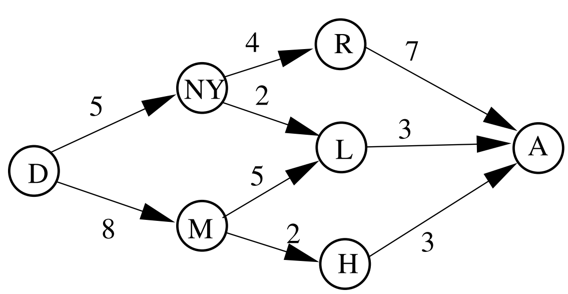
b) L'algorithme de Dijkstra est un algorithme de marquage, dont les étapes sont les suivantes :
Initialisation : écrire $\overline{s}$ au crayon et $\pi(\overline{s}) = 0$.
Itération : Tant qu'il existe un sommet au crayon :
- Parmi les sommets au crayon, choisir le sommet k tq l'étiquette $\pi(k)$ soit minimum
- Ecrire k à l'encre
- Pour tout successeur j de k,
  si j pas marqué, marquer j au crayon et $\pi(j) = \pi(k) + d_{k,j}$.
  si j marqué, $\pi(j) = \min(\pi(j), \pi(k) + d_{k,j})$.

On a la propriété suivante : Pour tout sommet j à l'encre, $\pi^*(j) = \pi(j)$.

c) L'application de l'algorithme de Dijkstra donne le tableau suivant :

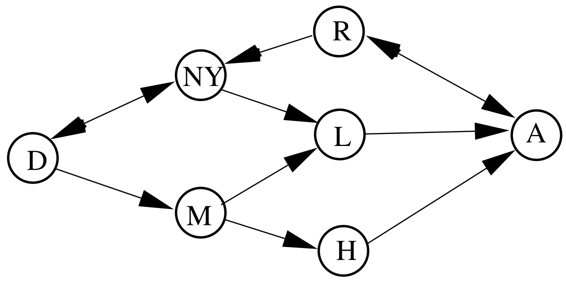
Itérations\sommets	$\overline{s}$=1	2	3	4	5
Init	0				
1		7	$\underline{1}$		
2		6			$\underline{3}$
3		$\underline{5}$		$\underline{8}$	

Exercice 2 : **Trafic maritime entre deux continents**
a) Cet exercice est un problème d'affectation, comme celui traité en TD (machines disponibles et taches à traiter, ou étudiants disponibles et devoirs à rendre). On sait que dans ce cas, on considère un graphe correspondant au problème, avec deux sommets artificiels supplémentaires, un de départ (correspondant aux stocks) et un d'arrivée (correspondant aux demandes). Cela donne ici :

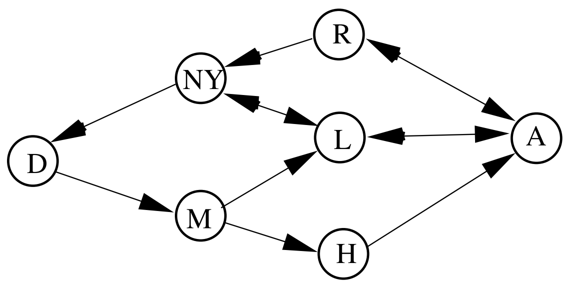


où les nombres figurent les capacités maximales de chaque arc. Le problème consiste donc à trouver un flot maximal du sommet de départ vers le sommet d'arrivée respectant les contraintes sur chaque arc.

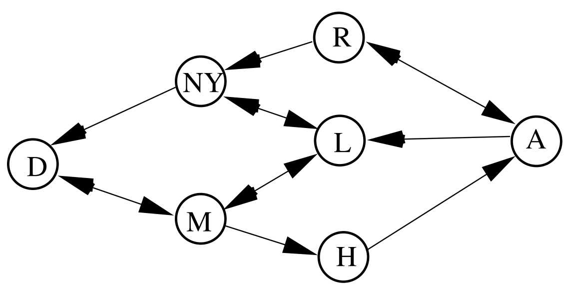
b) En utilisant l'algorithme de Ford-Fulkerson, on est amené à construire une suite de graphes d'écart correspondant à des flots intermédiaires, par exemple :



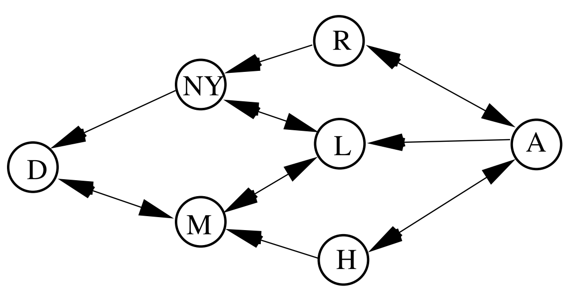
$\Gamma = [D, NY, R, A]$, $\theta = 4$



$\Gamma = [D, NY, L, A]$, $\theta = 1$

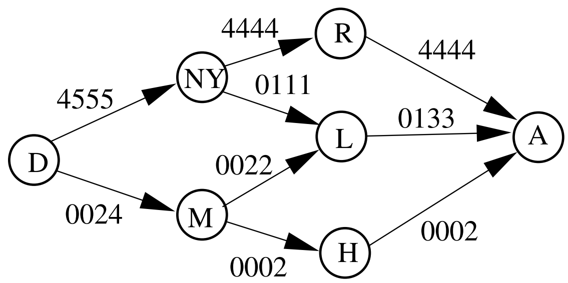


$\Gamma = [D, M, L, A]$, $\theta = 2$



$\Gamma = [D, M, H, A]$, $\theta = 2$

où Γ désigne le chemin considéré et θ le nombre défini dans le cours. Le dernier graphe d'écart ne contient plus de chemin de D vers A. Le flot obtenu est donc maximal. Les valeurs des flots intermédiaires sont données sur chaque arc par



avec le flot maximal correspondant au chiffre de droite. Le flot total maximal est donc de 9.
Exercice 3 :

a) On nous demande de calculer

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ipk\pi}{n}}.$$

Si p est un multiple de n, alors chaque terme de la somme vaut 1 et $S_p = n$.
Sinon, S_p est la somme des n premieres puissances de $e^{\frac{2ip\pi}{n}} \neq 1$ et l'on sait que cette somme vaut

$$\frac{(e^{\frac{2ip\pi}{n}})^n - 1}{e^{\frac{2ip\pi}{n}} - 1} = 0.$$

b) Soit $\mathcal{F}_n$ la transformation de Fourier discrète d'ordre n:

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}_n : & \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (y_k) & \longmapsto & (c_k) \end{array}$$

D'après le cours, l'expression des coefficients c_j en fonction des y_k est la suivante

$$c_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-kj} y_k.$$

Cette transformation est utilisée pour obtenir une approximation trigonométrique d'une fonction f périodique de période T dont on connait les valeurs exactes

$$y_k = f(kT/n), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Alors $f(x)$ est approchée par la somme trigonométrique $\sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{i\pi jx/T}$.

Exercice 4 :

(a) L'équation qui modélise les petites oscillations d'un pendule simple (sans frottement et sans forçage) de longueur l dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ est la suivante

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

(b) Le paramètre ω correspond à la fréquence $\sqrt{g/l}$ du pendule sans forçage.

(c) Les solutions réelles de l'équation homogène sont de la forme :

$$A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t),$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.
Si $\omega_f \neq \omega$, on cherche une solution particulière sous la forme

$$\theta(t) = a\sin(\omega_f t) + b\cos(\omega_f t),$$

où a et b sont des constantes réelles à determiner. Pour que l'équation (1) soit vérifiée, on vérifie facilement qu'il faut

$$a = \frac{\alpha}{\omega^2 - \omega_f^2}, \quad b = 0.$$

La solution générale de (1) est donc de la forme :

$$\theta(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega^2 - \omega_f^2}\sin(\omega_f t).$$

Si $\omega_f = \omega$, on cherche une solution particulière sous la forme

$$\theta(t) = (a\sin(\omega_f t) + b\cos(\omega_f t))t,$$

où, a nouveau, a et b sont des constantes réelles à déterminer. Après un calcul (qu'il faudrait détailler), on obtient

$$a = 0, \quad b = -\frac{\alpha}{2\omega}.$$

La solution générale de (1) est donc de la forme :

$$\theta(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) - \frac{\alpha}{2\omega} t\cos(\omega t).$$

(d) Dans le cas non résonnant, c'est à dire $\omega_f \neq \omega$, en utilisant l'expression de la solution générale obtenue précedemment, les CI se traduisent par

$$B = 1, \quad A\omega + \frac{\alpha\omega_f}{\omega^2 - \omega_f^2} = 0,$$

donc la solution de (1) est donnée par

$$\theta(t) = \frac{\alpha\omega_f}{\omega(\omega_f^2 - \omega^2)}\sin(\omega t) + \cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega^2 - \omega_f^2}\sin(\omega_f t).$$