USTL

Université des Sciences et Technologies de Lille

Math208 — Initiation à la modélisation mathématique
Licence Sciences — Devoir surveillé du 24/11/2007
Durée: 2 heures — Documents et calculatrices non autorisés

Barème indicatif: 6-8-6

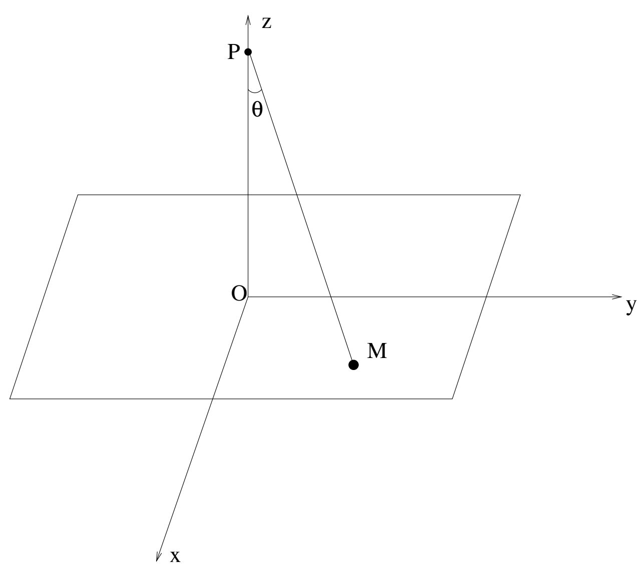
Exercice 1 : 1) Construire le graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 8 et dont les arcs relient x à y lorsque x divise y. De plus, les arcs sont valués par le quotient y/x (par exemple, l'arc allant de 2 à 8 a la valeur 4).

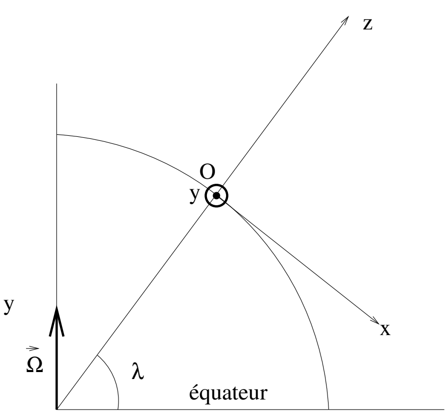
2) Comment reconnait-on dans ce graphe un nombre premier ?

3) Après avoir rappelé à quoi sert l'algorithme de Dijkstra, appliquez le en prenant 1 comme sommet de départ. On fera le tableau des étiquettes et celui des pères.

4) Comment retrouver dans ce graphe la décomposition d'un nombre en facteurs premiers ?

Exercice 2 : On considère un pendule constitué d'un fil PM accroché en P, de longueur L et d'une boule M de masse m. L'espace est rapporté au système d'axes $(Oxyz)$ fixe dans le référentiel lié à la surface de la Terre, l'axe (Oz) passant par P et le centre de la Terre:





On se place dans le cas de faibles oscillations. On rappelle que dans ce cas:

- Le mouvement de la boule Mde coordonnées (x, y, z) se fait dans le plan (Oxy)
- Le module de la tension du fil $\overrightarrow{T}$ est $T = m\,g$ où $g = 9,80\,m/s^{-2}$. Les composantes de la

tension sont ainsi

$$\overrightarrow{T} = \frac{mg}{L}(-x, -y, L\cos\theta)^t$$

a- Ecrire le principe fondamental de la dynamique et la projeter sur les axes de $(Oxyz)$. Dans le bilan des forces, on prendra

- $m\overrightarrow{g}$, cette expression rassemble la force de Newton et la force d'inertie d'entrainement.
- La tension $\overrightarrow{T}$
- La force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}}$. En notant $\overrightarrow{\Omega} = \Omega(-\cos\lambda, O, \sin\lambda)^t$ le vecteur rotation de la Terre et λ la latitude du lieu, $\overrightarrow{f_{ic}} = -2m\overrightarrow{\Omega}\wedge(\dot{x}, \dot{y}, 0)^t = -2m\Omega(-\dot{y}\sin\lambda, \dot{x}\sin\lambda, -\dot{y}\cos\lambda)^t$

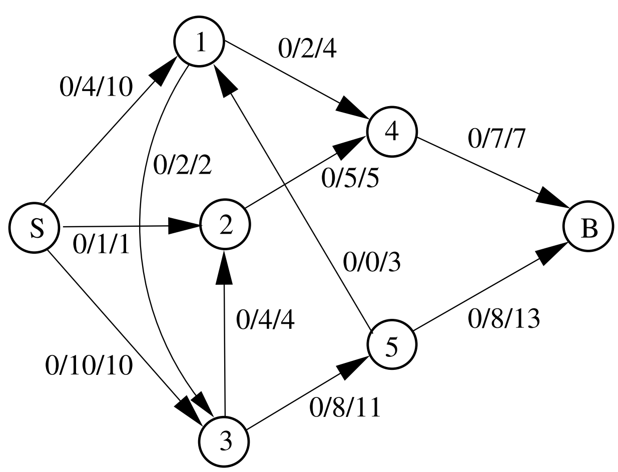
b- L'équation obtenue par projection sur (Oz) est un terme correctif que l'on néglige. Réduire l'expression des équations en x et y en posant $u = x + iy$ où $i = \sqrt{-1}$. Montrer que l'équation obtenue est de la forme:

$$\ddot{u} + 2i\Omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

c- Résoudre cette équation sachant qu'à $t = 0$, M est en $(x_0, 0, 0)$ avec une vitesse initiale nulle.

d- Simplifier les expressions en supposant que $\Omega_0 << \omega_0$. En effet, dans les conditions de l'expérience de Foucault faite au Panthéon en 1851 on a $L = 67$m, $g = 9,80\,m/s^{-2}$ et $\lambda = 49°$Nord. Ainsi $2\pi/\omega_0 = 16,4s$ et $2\pi/\Omega_0 = 31h40mn$.

Exercice 3 : On considère le flot représenté sur le graphe suivant entre la source S et le but B. Sur chaque arc, la notation $x/y/z$ désigne la valeur du flot y comprise entre la contrainte minimale x et la contrainte maximale z.



1) Ce flot est-il maximal (on le justifiera en utilisant un résultat du cours) ?

2) Comment s'appelle l'algorithme qui permet de construire un flot maximal ? Appliquer cet algorithme en prenant comme flot initial le flot considéré dans la question précédente. On précisera les graphes d'écart successifs et la valeur du flot maximal obtenu.