USTL

Université des Sciences et Technologies de Lille

Math208 — Initiation à la modélisation mathématique
Licence Sciences — Examen de janvier 2007
Durée: 2 heures — Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1:

a) Exprimer la transformée discrète de Fourier d'ordre n avec $n = 3$. On donnera cette transformation explicitement sous la forme $(y_0, y_1, y_2) \to (c_0, c_1, c_2)$.

b) Cette transformée de Fourier est issue d'une formule d'interpolation d'une fonction f $T-$périodique aux points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2), avec

$$y_k = f(x_k) \quad \text{et} \quad x_k = \frac{k}{n}T$$

Préciser l'expression de la fonction d'interpolation F qui passe par ces points.

c) Les formules donnant (y_k) et (c_k) peuvent s'étendre sur $\mathbb{Z}$. Justifier que ces deux suites sont périodiques de périodes n et que F interpole f en $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

d) En utilisant $(y_{-1}, y_0, y_1) \to (c_{-1}, c_0, c_1)$. Justifier et donner l'expression d'une autre fonction d'interpolation qui passe par les points (x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0) et (x_1, y_1).

Application:

Soit f la fonction telle que

$f(x) = \frac{2x}{\pi}$ si $x \in [0, \pi/2]$

$f(x) = -\frac{2x}{\pi} + 2$ si $x \in [\pi/2, \pi]$

et telle que f soit impaire et périodique de période 2π

e) Donner la représentation graphique de f

f) Donner la transformée de Fourier d'ordre n (pour $n = 1$ et 2) de f

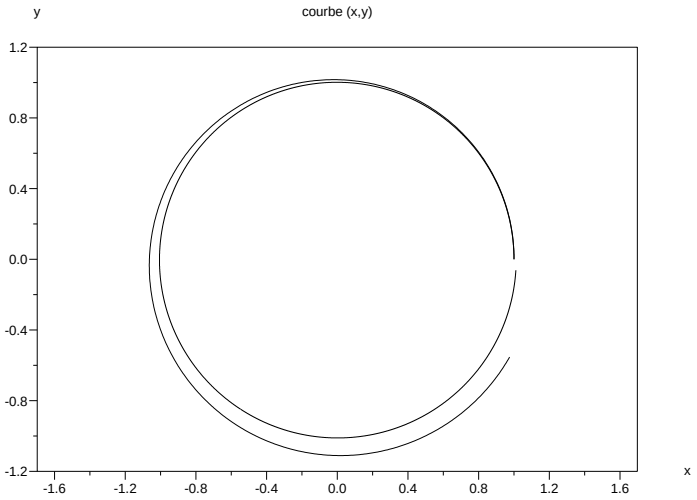
g) Exprimer la transformée de Fourier de f d'ordre 3.

h) En utilisant d), donner une fonction d'interpolation à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui passe par les points $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$

Exercice 2

On donne le programme Scilab suivant:

```
clear
duree=6.28;
h=0.01;
n=duree/h;
```




```
x(1)=1.;
y(1)=0.;
xp(1)=0.;
yp(1)=1.;

for i=1:n
x(i+1)  = x(i)  + h * xp(i);
y(i+1)  = y(i)  + h * yp(i);
xp(i+1) = xp(i) - h * x(i)/(x(i)**2+y(i)**2)**(3/2);
yp(i+1) = yp(i) - h * y(i)/(x(i)**2+y(i)**2)**(3/2);
end

plot2d(x,y,rect=[ -1.1 , -1.1, 1.1 , 1.1 ],frameflag= 3)
xtitle('courbe (x,y)','x','y')
```

Ce code est la résolution numérique d'une équation différentielle par la méthode d'Euler.

a) Donner son expression sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 1. Préciser aussi ses conditions initiales

b) En fait, cette équation est issue d'une équation différentielle d'ordre 2. Donner son expression. Préciser encore ses conditions initiales (position et vitesse initiales)

c) On donne dans la figure ci-dessus, le résultat de 2 exécutions consécutives de ce programme. La première avec $h = 0,01$ et la deuxième avec $h = 0,001$. Commenter cette figure.

d) Quelles instructions est-il nécessaire d'ajouter au programme ci-dessus pour prendre en compte un second membre de la forme $\cos 3t$?

Exercice 3

On considère le système masses-ressorts suivant : deux particules libres z_1 et z_2 de même masse $m = 1$, deux particules fixes z_0 et z_3 aux positions $(0, 0)$ et $(0, 20)$ (en coordonnées cartésiennes, dans le repère direct (O, x, y) habituel), deux ressorts de raideur 1 entre les couples de particules

(z_0, z_1) et (z_2, z_3), un ressort de raideur 2 entre le couple de particules (z_1, z_2). On suppose également que les 2 particules z_1 et z_2 ont un poids égal à 5 (c'est à dire que, pour simplifier, le vecteur gravitation $\vec{g}$ a un module égal à 5 dans cet exercice) que l'on prendra en compte dans l'étude.

a) Représenter par un dessin le système étudié. On fera apparaitre les forces exercées sur les particules libres.

b) Donner les équations du mouvement des particules libres, ainsi que la matrice de raideur K.

c) Diagonaliser K. On écrira K comme un produit de 3 matrices, en utilisant un changement de base orthogonal.

d) Décrire les modes propres (dans la direction verticale).

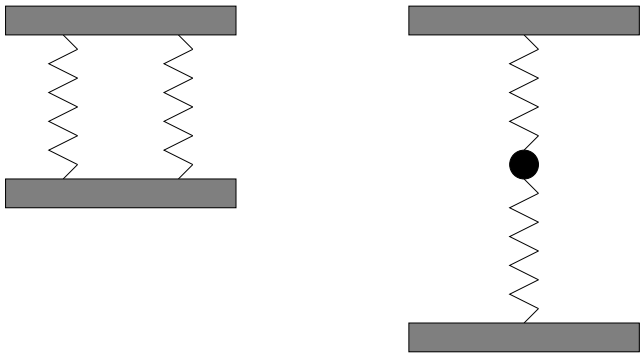
e) Donner les solutions de l'équation homogène, puis la solution à l'équilibre.

f) On se donne les conditions initiales suivantes à $t = 0$:

$$z_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad z_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \dot{z}_1(0) = \dot{z}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donner la solution complète, en coordonnées cartésiennes, décrivant le mouvement des deux particules libres.

Exercice 4

a) On considère le système de deux ressorts en parallèle comme sur la figure de gauche ci-dessous, les deux ressorts étant respectivement de raideurs k_1 et k_2. On souhaite remplacer ce système par un ressort unique. Quelle devrait être sa raideur ? Expliquer.

b) On considère le système de deux ressorts en série comme sur la figure à droite ci-dessous, avec une particule intermédiaire sans poids, les deux ressorts étant toujours de raideurs k_1 et k_2. On souhaite à nouveau remplacer ce système par un ressort unique. Quelle devrait être sa raideur ? Expliquer.