USTL

Université des Sciences et Technologies de Lille

**Math208 — Initiation à la modélisation mathématique**
**Licence Sciences — Examen de janvier 2009**
**Durée: 2 heures — Documents et calculatrices non autorisés**

Exercice 1 (Question de cours) :

Rappeler les deux caractérisations vues en cours d'une matrice orthogonale. Montrer que ces deux caractérisations sont équivalentes.

Exercice 2 :

On considère le système composé des particules suivantes :
– Une particule libre $z_1$ de masse 1 reliée par deux ressorts de raideur 1 à deux particules fixes $z_4$ et $z_5$ respectivement en $(-1, 1)$ et $(-1, -1)$.
– Une particule libre $z_2$ de masse 1 reliée par deux ressorts de raideur 1 à deux particules fixes $z_3$ et $z_6$ respectivement en $(1, 1)$ et $(1, -1)$.
– Les particules libres $z_1$ et $z_2$ sont reliées par un ressort de raideur $k$.

1) Représenter le système par un dessin.

2) Ecrire les équations décrivant les mouvements des particules $z_1$ et $z_2$ sous forme matricielle.

3) Résoudre l'équation homogène.

4) Décrire les modes propres.

5) Déterminer la solution à l'équilibre. Expliquer si la solution que vous obtenez vous semble raisonnable, en fonction du système étudié.

6) Déterminer toutes les solutions des équations des mouvements de $z_1$ et $z_2$ (en fonction de constantes dépendant des conditions initiales).

7) On considère à présent que les particules $z_1$ et $z_2$ sont soumises à des forces de gravité de module $F_1$ et $F_2$. Que faut-il modifier dans les équations précédentes pour tenir compte de cette hypothèse ?

8) Déterminer les nouvelles solutions du système.

Exercice 3 :

On considère une fonction $T-$périodique $f$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Soit $n$ un entier $n \geq 1$. On pose $x_k = \frac{k}{n}T$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

a) Question de cours:

En utilisant la notation: $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ , donner l'expression des coefficients $c_j$ tel que

$$y_k = f(x_k) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \exp(\frac{2i\pi}{T} j x_k) \tag{1}$$

pour $k = 0, \cdots, n-1$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

b) Montrer que la suite $(c_j)$ est périodique de période $n$ et montrer que (1) est vrai pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}$.

On suppose maintenant que $n$ est impair et on note $m$ l'entier tel que $n = 2m + 1$.

c) On cherche la suite $(d_j)$ telle que

$$y_k = f(x_k) = \sum_{j=-m}^{m} d_j \exp(\frac{2i\pi}{T} j x_k)$$

pour tout $k$ dans $\{-m, \cdots, m\}$. Vérifier que $(d_j) = (c_j)$ est solution .

d) Dans le cas où $f$ est paire et réelle, en déduire une formule composée uniquement de fonctions réelles qui interpole $f$.

Exercice 4 :

On considère deux villes étendues A et B reliées par deux routes. On sait que:

- ces 2 routes ne se coupent nulle part,
- deux mobiles empruntant chacun une de ces routes et liés entre eux par une ficelle de longueur $2l$ , peuvent se rendre de A à B sans rompre la ficelle.

En utilisant un espace des phases adéquat, prouver géométriquement que deux véhicules sphériques de rayon $l$ , dont les centres se déplacent sur chacune de ces routes, l'un à la rencontre de l'autre, vont immanquablement se heurter.