

Math208 — Initiation à la modélisation mathématique
Licence Sciences — Examen de Juin 2005
Durée : 2 heures — Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 : On considère l'équation du pendule forcé par un terme périodique :

$$\ddot{\theta} + \theta = \sin((1 + \varepsilon)t) \quad (1)$$

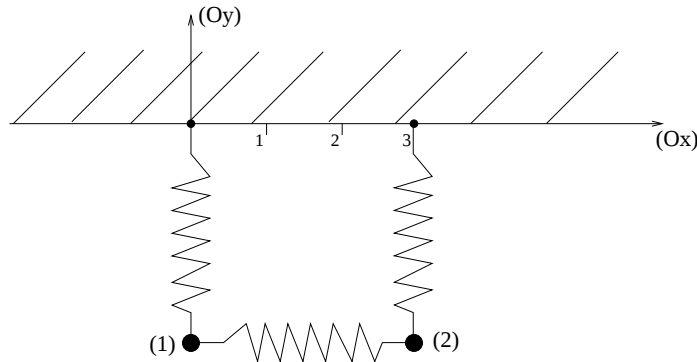
où ε est un paramètre de l'intervalle $] -1, +1[$, avec les conditions initiales

$$\theta(0) = 1 \quad ; \quad \dot{\theta}(0) = 0 \quad (2)$$

On rappelle que les notations $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ désignent les dérivées première et seconde de θ par rapport au temps t .

- (a) Que représente θ d'un point de vue géométrique ? Quelle est l'hypothèse faite pour que la partie libre de (1) représente l'équation d'un pendule ?
- (b) Donner la solution de (1) avec les conditions initiales (2) dans le cas où $\varepsilon = 0$.
- (c) On suppose maintenant que $\varepsilon \neq 0$. Donner la solution de (1) avec les conditions initiales (2).
- (d) A t fixé, faire tendre ε vers 0 afin de comparer la solution obtenue en (c) avec celle obtenue en (b).

Exercice 2 : Soit un système de deux points matériels de même masse ($m_1 = m_2 = 1$) et de trois ressorts assemblés comme dans le dessin ci-dessous :



Le point (1) est relié au plafond par un ressort fixé à un point du plafond correspondant à l'origine.

Le point (2) est relié au plafond par un ressort fixé à un point du plafond de coordonnées $(3, 0)^t$ selon le système d'axes défini par la figure.

Les points (1) et (2) sont eux mêmes reliés entre eux par un ressort. Ces trois ressorts ont même raideur 1. Les deux particules sont soumises à une force de pesanteur de magnitude 3. On ne considère ni frottement ni agitation extérieure.

- (a) Justifier et écrire un système d'équations différentielles décrivant le mouvement des deux points matériels dans le plan.

- (b) Donner la matrice de raideur $K = \tilde{K}$ et la position d'équilibre.
- (c) Résoudre le système sachant qu'à l'instant initial $t = 0$, la particule (1) est en $(-1, -3)^t$ et la particule (2) est en $(4, -3)^t$, toutes deux avec une vitesse initiale nulle.

Exercice 3 : (a) Soit donné un graphe $G = (S, A)$, et une valuation $d : A \mapsto \mathbb{R}$. De plus, soient $x, y \in S$ deux sommets fixes.

- (1) Rappeler la définition d'un chemin de x à y dans G . Comment calcule-t-on sa valeur ?
- (2) Un plus court chemin de x à y , existe-t-il toujours ? Est-il unique ? Justifier.
- (b) Dans le tableau ci-joint on trouve le principal réseau d'autoroutes en République Dominicaine, ainsi que les distances (en km). En utilisant un algorithme du cours, trouver un plus court chemin de Santo Domingo à toute autre ville (après calcul, on reproduira le graphe en dessinant les plus courts chemins d'une autre couleur).

km	Santo Domingo	Puerto Plata	Punta Cana
Barahona	201		
Santiago	166	50	
Samana	245	210	185
La Romana	110		105
Monte Cristi		137	
Higuey			60