USTL Université des Sciences et Technologies de Lille

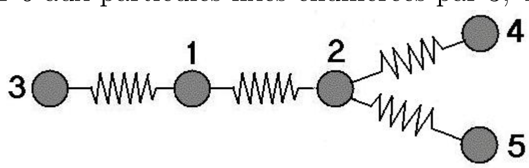
Math208 — Initiation à la modélisation mathématique
Licence MIMP S3 — Examen du 11 Janvier 2006
Durée : 2 heures — Documents et calculatrices non autorisés

Questions de cours ($\leq$ 10 minutes) :

(Q) Soit $G = (S, A)$ un graphe, valué par $f : A \mapsto \mathbb{R}$, et $x, y \in S$. Rappeler la définition d'un chemin entre x et y, et la définition d'un chemin de valeur minimale entre x et y. A-t-on toujours unicité pour ce dernier ? Justifier.

Deux exercices indépendants

Exercice 1 ($\leq$ 50 minutes) : Considérons le système de masses-ressorts ci-dessous ou deux particules libres énumérées par 1 et 2 de masse 1 sont reliées entre elles par un ressort de raideur 4, et reliées par des ressorts de raideur 6 aux particules fixes énumérées par 3, 4 et 5, à des positions z_3, z_4, z_5, respectivement.



$$z_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; z_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \; z_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Dans un premier temps on considère le système sans force de gravité et sans force de frottement.

i. Ecrire en justifiant un système d'équations différentielles permettant de modéliser le mouvement des particules libres. Donner la matrice de raideur $K = \widetilde{K}$, et la position d'équilibre des deux particules.

ii. Supposons que, à l'instant $t = 0$, la particule 1 se trouve à l'endroit $(1, 2)^t$ et la particule 2 à l'endroit $(5, 1)^t$, les deux avec une vitesse initiale zéro. Résoudre le système d'équations différentielles.

(b) Supposons maintenant que la particule libre j ($j = 1, 2$) est aussi soumise à une force de frottement $F_j^{frott} = -6\dot{z}_j$, $j = 1, 2$, proportionnelle et opposée à sa vitesse $\dot{z}_j$. Préciser quelles changements il faut apporter au calcul pour la question précédente, et décrire la nature de la nouvelle solution (*on ne demande pas de déterminer les valeurs explicites des constantes*).

Tourner, svp.

Exercice 2 ($\leq$ 50 minutes) : Soit $n \geq 2$ un entier. *N.B. : Les parties (a) et (b) sont indépendantes.*

(a) Soit $\mathcal{F}_n$ la transformation de Fourier discrète d'ordre n :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}_n : & \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (y_k) & \longmapsto & (c_j) \end{array}$$

i. Rappeler (sans la démontrer) la formule qui donne les coefficients c_j en fonction des y_k.

ii. Préciser l'utilité de cette transformation pour le problème où on approche une fonction $f : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ par une somme trigonométrique de la forme

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \, e^{ijx}$$

en certains points de l'intervalle $[0, 2\pi]$.

iii. Expliciter $f_n(x)$ pour le cas particulier $f(x) = \sin(x)$.

(b) Soit $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction impaire. On veut que l'approximation

$$f(x) \simeq g_n(x) = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \sin(jx)$$

soit exacte aux points

$$x_k = \frac{k\pi}{n} \quad \text{pour} \quad k = 1, \cdots, n-1.$$

i. Etablir le système d'équations qui permet de déterminer les c_j.

ii. Montrer que $f(x_k) = g_n(x_k)$ aussi pour $k = 0, -1, -2, ..., 1-n$.

iii. Résoudre le système de la question i. pour $n = 4$ (on pourra montrer qu'on se ramène à une matrice d'un type particulier après multiplication par un scalaire).

iv. Expliciter $g_4(x)$ pour le cas particulier $f(x) = \sin(5x)$.