USTL Université des Sciences et Technologies de Lille

Math208 — Initiation à la modélisation mathématique
Licence MIMP S3 — Examen du 11 Janvier 2006
Durée : 2 heures — Documents et calculatrices non autorisés

Corrigé du 12/2/2006

Questions de cours ($\leq$ 10 minutes) :

(Q) Soit $G = (S, A)$ un graphe, valué par $f : A \mapsto \mathbb{R}$, et $x, y \in S$. Rappeler la définition d'un chemin entre x et y, et la définition d'un chemin de valeur minimale entre x et y. A-t-on toujours unicité pour ce dernier ? Justifier.

Un chemin $\gamma = [s_0, ..., s_k]$ est une suite de sommets $s_j \in S$ de sorte que $\forall j = 0, ..., k-1$, $(s_j, s_{j+1}) \in A$ (ou, d'une manière équivalente, $s_{j+1} \in \Gamma^+(s_j)$). Le sommet $s_0 = x$ est dit source de γ, et $s_k = y$ est dit but de γ. La valeur de ce chemin est donnée par

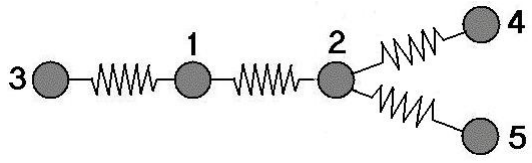
$$d(\gamma) = d((s_0, s_1)) + d((s_1, s_2)) + ... + d((s_{k-1}, s_k)),$$

la somme des valeurs des arcs constituant ce chemin. Pour le problème dit *de recherche d'un chemin de valeur minimale entre x et y* on considère M l'ensemble des chemins dans G avec source x et but y, et on cherche à extraire de M le chemin γ (dit de valeur minimale) ayant une valeur $\leq$ à tout autre chemin dans M.

Un chemin de valeur minimale n'est pas forcement unique, pour cela il suffit de considérer le graphe $G = (S, A)$ avec $S = \{1, 2, 3\}$ et arcs $(1, 2)$ de valeur 2, et $(1, 3)$ et $(3, 2)$ de valeur 1. Ici M comporte exactement deux chemins, $M = \{[1, 2], [1, 3, 2]\}$, les deux de valeur 2.

Deux exercices indépendants

Exercice 1 ($\leq$ 50 minutes) : Considérons le système de masses-ressorts ci-dessous ou deux particules libres énumérées par 1 et 2 de masse 1 sont reliées entre elles par un ressort de raideur 4, et reliées par des ressorts de raideur 6 aux particules fixes énumérées par 3, 4 et 5, à des positions z_3, z_4, z_5, respectivement.



$$z_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; z_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \; z_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Dans un premier temps on considère le système sans force de gravité et sans force de frottement.

i. Ecrire en justifiant un système d'équations différentielles permettant de modéliser le mouvement des particules libres. Donner la matrice de raideur $K = \widetilde{K}$, et la position d'équilibre des deux particules.

ii. Supposons que, à l'instant $t = 0$, la particule 1 se trouve à l'endroit $(2, 2)^t$ et la particule 2 à l'endroit $(5, 1)^t$, les deux avec une vitesse initiale zéro. Résoudre le système d'équations différentielles.

(b) Supposons maintenant que la particule libre j ($j = 1, 2$) est aussi soumise à une force de frottement $F_j^{frott} = -6\dot{z}_j$, $j = 1, 2$, proportionnelle et opposée à sa vitesse $\dot{z}_j$. Préciser quelles changements il faut apporter au calcul pour la question précédente, et décrire la nature de la nouvelle solution (*on ne demande pas de déterminer les valeurs explicites des constantes*).

Partie 1(a)(i) : en notant la position de la particule à l'instant t par $z_j(t)$, nous écrivons la loi de Newton, où dans la force du second membre il faut tenir compte des forces d'interaction induites par les ressorts. Ceci donne pour les deux fonctions inconnues $z_1(t)$, $z_2(t)$ le système (sachant que la masse de ces particules vaut 1)

$$\ddot{z_1}(t) = 6(z_3(t) - z_1(t)) + 4(z_2(t) - z_1(t)), \quad z_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\ddot{z_2}(t) = 6(z_4(t) - z_2(t)) + 6(z_5(t) - z_2(t)) + 4(z_1(t) - z_2(t)), \quad z_4(t) = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z_5(t) = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Par une complexification $z_k(t) = \begin{bmatrix} x_k(t) \\ y_k(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ssi $w_k(t) = x_k(t) + iy_k(t) \in \mathbb{C}$, nous nous ramenons au système

$$\begin{cases} \ddot{w_1} = -10w_1 + 4w_2 \\ \ddot{w_2} = -16w_2 + 4w_1 + 72 \end{cases}$$

ou, écrit sous forme matricielle,

$$\ddot{w} = -Kw + F^{ext}, \quad w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}, \quad F^{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 72 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix},$$

avec $K = \widetilde{K}$ la matrice de raideur (les masses valent 1), et la position d'équilibre (solution particulière de l'équation inhomogène) déterminée par $\ddot{w} = 0$, ce qui donne

$$Kw^{eq} = F^{ext} \quad \Longleftrightarrow \quad w^{eq} = K^{-1}F^{ext} = \frac{1}{144}\begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} F^{ext} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

La position d'équilibre de la particule 1 est alors $(2,0)^T$, et celle de la particule 2 vaut $(5,0)^T$, ce qui est raisonnable vu le problème physique.

Partie 1(a)(ii) : Nous cherchons d'abord la solution générale w^h du système homogène $\ddot{w} + Kw = 0$. Diagonalisons la matrice K : valeurs propres

$$\det(\lambda I_2 - K) = \lambda^2 - 26\lambda + 144 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = 18, \lambda_2 = 8$$

(comme il faut pour une matrice symétrique définie positive, on trouve bien des valeurs propres strictement positives). Espace propre pour $\lambda_1 = 18$

$$(18I_2 - K)v_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

et pour $\lambda_2 = 8$

$$(8I_2 - K)v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice $V = [v_1, v_2]$ est bien orthogonale (comme il faut après la théorie) car $V^TV = I_2$, et alors $V^{-1} = V^T$. En posant $w^h(t) = V\theta(t)$, nous obtenons pour les composantes le système découplé

$$\ddot{\theta_1}(t) + 18\theta_1(t) = 0, \qquad \ddot{\theta_2}(t) + 8\theta_2(t) = 0,$$

avec comme solution générale

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} C_{11}\cos(\sqrt{18}t) + C_{12}\sin(\sqrt{18}t) \\ C_{21}\cos(\sqrt{8}t) + C_{22}\sin(\sqrt{8}t) \end{bmatrix}.$$

L'énoncé nous donne des conditions initiales :

$$\dot{\theta}(0) = V^{-1}\dot{w}(0) = 0, \qquad \theta(0) = V^{-1}(w(0) - w^{eq}) = V^T\begin{bmatrix} 2+2i-2 \\ 5+i-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

et les constantes $C_{11} = C_{12} = 0 = C_{22}$, $C_{21} = i\sqrt{5}$, et alors la solution

$$w(t) = w^{eq} + i\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cos(\sqrt{8}t),$$

ce qui signifie physiquement un mode propre (oscillation verticale autour du point d'équilibre).

Partie 1(b) : il faut ajuster la loi fondamentale de la mécanique en ajoutant au second membre de (1) le terme $-6\dot{z_1}(t)$ et au second membre de (2) le terme $-6\dot{z_2}(t)$. Après complexification, ceci donne lieu au système d'équations différentielles

$$\ddot{w} = -6\dot{w} - Kw + F^{ext}, \quad w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}, \quad F^{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 72 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix}.$$

La solution d'équilibre (solution particulière de l'équation inhomogène) est déterminée par $\ddot{w} = \dot{w} = 0$, donc la même qu'avant. Pour résoudre le système homogène $\ddot{w} = -6\dot{w} - Kw$, on diagonalise par la même matrice : la substitution $w^h(t) = V\theta(t)$ (et alors $\dot{w^h}(t) = V\dot{\theta}(t), \ddot{w^h}(t) = V\ddot{\theta}(t)$) donne pour les composantes de θ le système découplé

$$\ddot{\theta_1}(t) + 6\dot{\theta_1}(t) + 18\theta_1(t) = 0, \qquad \ddot{\theta_2}(t) + 6\dot{\theta_2}(t) + 8\theta_2(t) = 0.$$

En écrivant les équations caractéristiques correspondants (ansatz $\theta_j(t) = \exp(\alpha t)$), on trouve pour θ_1 comme solution $\alpha_{1,2} = -3 \pm 3i$, et pour θ_2 comme solution $\alpha_{1,2} = -3 \pm 1$. Par conséquent, on obtient la solution générale du système inhomogène

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} C_{11}e^{-3t}\cos(3t) + C_{12}e^{-3t}\sin(3t) \\ C_{21}e^{-2t} + C_{22}e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

Sachant que les conditions initiales pour θ sont les mêmes que dans la question précédente, on peut vite conclure que $C_{11} = \theta_1(0) = 0$, $C_{12} = \dot{\theta}_1(0)/3 = 0$, et qu'il reste alors un mouvement décrit par une superposition d'exponentielles : au lieu d'une oscillation, les deux particules vont tendre directement vers leur position d'équilibre.

Hors barême, voici la valeur exacte des deux constantes manquantes :

$$C_{21} + C_{22} = \theta_2(0) = i\sqrt{5}, \qquad -2C_{21} - 4C_{22} = \dot{\theta}_2(0) = 0$$

et alors $C_{22} = -i\sqrt{5}$, $C_{21} = 2i\sqrt{5}$, donnant lieu à la solution

$$w(t) = w^{eq} + i\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}[2e^{-2t} - e^{-4t}],$$

c'est-à-dire, les particules convergent verticalement vers leurs positions d'équilibre (sans jamais l'atteindre, car $[2e^{-2t} - e^{-4t}]$ ne s'annule pas pour $t > 0$).

Exercice 2 (≤ 50 minutes) : Soit $n \geq 2$ un entier. *N.B. : Les parties (a) et (b) sont indépendantes.*

(a) Soit $\mathcal{F}_n$ la transformation de Fourier discrète d'ordre n :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}_n : & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ & (y_k) & \longmapsto & (c_j) \end{array}$$

i. Rappeler (sans la démontrer) la formule qui donne les coefficients c_j en fonction des y_k.

ii. Préciser l'utilité de cette transformation pour le problème où on approche une fonction $f : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ par une somme trigonométrique de la forme

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j\, e^{ijx}$$

en certains points de l'intervalle $[0, 2\pi]$.

iii. Expliciter $f_n(x)$ pour le cas particulier $f(x) = \sin(x)$.

(b) Soit $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction impaire. On veut que l'approximation

$$f(x) \simeq g_n(x) = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \sin(jx)$$

soit exacte aux points

$$x_k = \frac{k\pi}{n} \quad \text{pour} \quad k = 1, \cdots, n-1.$$

i. Etablir le système d'équations qui permet de déterminer les c_j.

ii. Montrer que $f(x_k) = g_n(x_k)$ aussi pour $k = 0, -1, -2, ..., 1 - n$.

iii. Résoudre le système de la question i. pour $n = 4$ (on pourra montrer qu'on se ramène à une matrice d'un type particulier après multiplication par un scalaire).

iv. Expliciter $g_4(x)$ pour le cas particulier $f(x) = \sin(5x)$.

Exo2 : (a) i. La formule est $c_j = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(-\frac{2\pi i}{n} jk) y_k$ (pour l'intervalle $[0, 2\pi]$).

ii. Il faudra d'abord préciser le sens du mot "approcher" : nous demandons que $f_n(x_k) = f(x_k)$ pour $k = 0, 1, ..., n-1$, avec $x_k = \frac{2\pi}{n} k$ (points équidistants sur $[0, 2\pi[$). Dans ce cas, il a été montré en cours qu'en posant $y_k = f(x_k)$, la formule de la partie (i) permet de trouver les coefficients $b_j = c_j$ de la fonction f_n en fonction des valeurs y_k de f.

iii. D'après la formule d'Euler $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ nous savons que

$$\begin{aligned} y_k &= \sin(x_k) = \frac{1}{2i}[\exp(ix_k) + \exp(-ix_k)] = \frac{1}{2i}[\exp(\tfrac{2\pi i}{n}k) - \exp(-\tfrac{2\pi i}{n}k)\exp(\tfrac{2\pi i}{n}nk)] \\ &= \frac{1}{2i}[\exp(\tfrac{2\pi i}{n}k) - \exp(\tfrac{2\pi i}{n}(n-1)k)]. \end{aligned}$$

Comme de plus pour $\ell, j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ d'après le cours

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp(-\tfrac{2\pi i}{n} jk)\exp(\tfrac{2\pi i}{n}\ell k) = \delta_{j,\ell},$$

nous déduisons que le $j$ième coefficient c_j de l'interpolant f_n de $f(x) = \sin(x)$ est donné par

$$c_j = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n-1} \exp(-\tfrac{2\pi i}{n} jk)[\exp(\tfrac{2\pi i}{n}k) - \exp(\tfrac{2\pi i}{n}(n-1)k)] = \frac{1}{2i}[\delta_{j,1} - \delta_{j,n-1}]$$

c'est-à-dire, $c_1 = 1/(2i)$, $c_{n-1} = -1/(2i)$ et $c_j = 0$ pour les autres j.
NB : $f_n(x) = \sin(x) = f(x)$.

(b) i. Il faudra que $f(x_k) = g_n(x_k)$ pour $k = 1, ..., n-1$, ou, autrement écrit

$$\forall\, k = 1, ..., n-1 : \qquad f(x_k) = c_1 \sin(x_k) + c_2 \sin(2x_k) + ... + c_{n-1}\sin((n-1)x_k).$$

ii. La fonction f est impaire par hypothèse, de même les fonctions $x \mapsto \sin(jx)$ pour tout entier j et donc g_n sont impaires. Comme $x_0 = 0$, on en déduit en particulier que $f(x_0) = 0 = g_n(0)$. De même, pour $k = -1, ..., -(1-n)$ nous avons par hypothèse que $x_k = -x_{-k}$, avec $-k \in \{1, 2, ..., n-1\}$, ce qui par construction du g_n implique que

$$g_n(x_k) = -g_n(x_{-k}) = -f(x_{-k}) = f(x_k),$$

ce qu'il fallait démontrer.

iii. Pour $n = 4$, en remplaçant $\sin(jx_k) = \sin(\pi\frac{jk}{4})$ par sa valeur, on obtient de la question (i) le système d'équations linéaires (écrit sous forme matricielle) pour les inconnues c_1, c_2, c_3

$$A\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix}, \qquad A := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

On vérifie assez aisément que $A^T A$ coincide avec 2 fois l'identité d'ordre 3, et donc $B := A/\sqrt{2}$ est une matrice orthogonale. Par conséquent, pour résoudre le système il suffit de multiplier à gauche avec la matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}B^T = \frac{1}{2}A^T.$$

iv. Pour $f(x) = \sin(5x)$ on connaît le second membre du système, et alors

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}A^T \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}A^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, $g_4(x) = -\sin(3x)$.