Compléments

Le théorème des trois droites. Application à l'interpolation. ([QZ], [An]) [(D : 1, 2, 7, 8, 34, 39, 40, 45)]
On note, pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, $\mathbb{H}_{a,b} = \{z \in \mathbb{C},\ a < \operatorname{Re} z < b\}$. Soit $f \in H(\mathbb{H}_{a,b}) \cap C(\mathbb{H}_{a,b})$ telle que $|f(z)| \leq C$ dans $\mathbb{H}_{a,b}$.

On pose, pour $a < x < b$,

$$M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|.$$

On se propose de montrer que :

$$\forall x \in]a, b[, \qquad M^{b-a}(x) \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}.$$

1. Supposons $M(a) = M(b) = 1$. Utiliser le théorème de l'application ouverte pour montrer directement que $|f| \leq 1$.
2. Posons

$$g(z) = M(a)^{(b-z)/(b-a)} M(b)^{(z-a)/(b-a)}.$$

Appliquer le résultat de la question 1 à $f(z)/g(z)$ et déduire le théorème des trois droites.
3. Application à l'interpolation. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et λ la mesure de Lebesgue. Soit $T : L^1(U) \to L^\infty(\Omega)$ une application linéaire continue de norme M. On suppose de plus que $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ de manière continue et de norme 1. On se propose de montrer que $T : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ pour tout $1 < p < 2$ et que $\|Tf\|_q \leq M^{(2-p)/p} \|f\|_p$ et où q est le conjugué de p, c'est-à-dire que q vérifie $p^{-1} + q^{-1} = 1$.
a. Soit $h \in L^q$. Montrez que $\|h\|_q \leq M^{(2-p)/p}$ si et seulement si pour tout $g \in L^p$ telle que $\|g\|_{L^p} = 1$, on a

$$\left| \int_\Omega hg d\lambda \right| \leq M^{(2-p)/p}.$$

Il pourra pour cela être utile de prendre $g = \overline{h}|h|^{q-2}/\|f\|_q^{q-1}$. Montrez que $\|h\|_q \leq M^{\frac{2-p}{p}}$ si et seulement si pour tout $g \in L^p$ simple telle que $\|g\|_{L^p} = 1$, on a

$$\left| \int_\Omega hg d\lambda \right| \leq M^{(2-p)/p}.$$

b. Montrer qu'il suffit de prouver que

$$\left| \int_\Omega (Tf) g d\lambda \right| \leq M^{(2-p)/p}$$

pour toutes fonctions simples f et g telles que $\|f\|_p = \|g\|_p \leq 1$.
c. On suppose f et g simples fixées vérifiant les conditions précédentes. On pose

$$\phi(z) = \int_\Omega |g|^{zp-1} g T(|f|^{zp-1} f) d\lambda.$$

Montrer que ϕ est une fonction entière. Appliquer le théorème des trois droites avec $a = 1/2$ et $b = 1$, puis conclure.
4. Montrer que la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ se prolonge en une application linéaire continue de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R})$ si $1 < p < 2$ et q est le conjugué de p.

Fonction Γ ([Go], p.290 et p.260). [(D: 7, 29, 35, 39, 41, 45, 46, 47) Extraire les points à traiter en fonction de la leçon à illustrer.]

Soit la fonction *gamma* définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad \text{pour } x > 0.$$

1. Montrer que Γ est bien définie, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Montrer que Γ est convexe sur $\mathbb{R}_*^+$. Montrer que Γ est logarithmiquement convexe (*i.e.* $\log \Gamma$ est convexe. On pourra pour cela montrer qu'une fonction F est logarithmiquement convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si $F'^2 \leq FF''$, et utiliser l'inégalité de Cauchy -Schwarz).
3. Montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

4. Donner un équivalent de Γ en $0+$ et tracer son graphe.
5. Montrer que Γ se prolonge holomorphiquement au demi-plan $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\ z > 0\}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall z \in \mathbb{H}^+, \qquad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}.$$

En déduire que Γ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

Autre méthode : Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{H}^+, \qquad \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

En déduire que Γ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ et les résidus de Γ aux points $-n$ quand $n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

7. Calculer $\Gamma(1/2)$.
8. Démontrer la formule de Weierstrass :

$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}\right],$$

où γ désigne la constante d'Euler définie par

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right).$$

9. Démontrer la *formule de duplication* :

$$\forall x > 0, \qquad 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x).$$

(Utiliser le résultat de la question 6). Peut-on prolonger cette identité sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$?

10. *Développement Eulérien de* sin.

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On désigne par f_α l'application continue, C^1 par morceaux et $2\pi-$périodique définie par :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad f_\alpha(t) = \cos \alpha t.$$

Calculer la série de Fourier de f_α. En déduire que

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad \cos \alpha t = \frac{\sin \alpha t}{\alpha \pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nt.$$

puis que

$$\operatorname{cotan} \alpha\pi = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)},$$

et enfin que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \qquad \operatorname{cotan} t = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

b. Soit $x \in]0, \pi[$ et

$$f : [0, x] \ni t \mapsto \operatorname{cotan} t - \frac{1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \in \mathbb{R}.$$

En intégrant cette fonction f sur l'intervalle $[0, x]$, et en prenant l'exponentielle des deux membres de l'égalité obtenue, montrez que :

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \qquad \sin t = t \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right).$$

c. Montrez que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

11. *Formule des compléments.* Montrer que

$$\forall x \in]0, 1[, \qquad \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi},$$

puis que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \qquad \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

12. *Dérivée logarithmique de* Γ. Montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}.$$

En déduire, après avoir vérifié la convergence de l'intégrale, que

$$\int_0^\infty (\ln t)e^{-t}dt = -\gamma.$$

13. Montrez que, pour $x > 0$,

$$(\ln\Gamma)''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

14. *Première formule de Binet.* [AAR]
a. *Formule de Dirichlet.* On se propose de montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \frac{1}{z}\left(e^{-t} - \frac{1}{(1+z)^x}\right)dz.$$

Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{e^z - e^{-sz}}{z}dz = \ln s. \tag{$*$}$$

En considérant l'intégrale double

$$\int_{z=0}^\infty \int_{s=0}^\infty s^{x-1}\frac{e^{-s-z} - e^{-s(1+z)}}{z}ds\,dz,$$

qui vaut d'une part $\Gamma'(x)$ et d'autre part

$$\Gamma(x)\int_0^\infty \frac{1}{z}\left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x}\right)dz,$$

déduire le résultat.
b. *Formule de Gauss.* Montrer que

$$\begin{aligned}
\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= \lim_{\delta\to 0+}\left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-z}}{z}dz - \int_\delta^\infty \frac{dz}{z(1+z)^x}\right)\\
&= \lim_{\delta\to 0+}\left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-z}}{z}dz - \int_{\ln(1+\delta)}^\infty \frac{e^{-tx}dt}{1-e^{-t}}\right)\\
&= \lim_{\delta\to 0+}\left(\int_\delta^{\ln(1+\delta)} \frac{e^{-z}}{z}dz + \int_{\ln(1+\delta)}^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}\right)dt\right)\\
&= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right)dz.
\end{aligned}$$

c. Montrer en utilisant la formule précédente et $(*)$ que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{2x} + \ln x - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)e^{-tx}dt.$$

En déduire que

$$\forall x > 0, \quad \ln\Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x - x + 1 + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)\frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}dt,$$

puis que

$$\forall x>0, \qquad \ln\Gamma(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+1+\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-tx}}{t}dt-I$$

où

$$I=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-t}}{t}dt$$

En utilisant la formule de Stirling, montrez que $I=1-\frac{1}{2}\ln(2\pi)$. En déduire la *première formule de Binet* :

$$\forall x>0, \qquad \ln\Gamma(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-tx}}{t}dt.$$

Prolongement holomorphe de $\sum_{n=1}^\infty z^n/n^\alpha$ à $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty[$ pour $\alpha>0$. ([QZ], p.57) [(D: 7, 35, 39, 41, 43, 45, 47)]
Soit $\alpha>0$. On se propose de montrer que la série entière $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^\alpha}$ de rayon de convergence égal à 1 se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty[$.
1. Montrez que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $n^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-nt}dt$.
2. Montrez que, pour tout z dans $\mathbb{C}$ de module strictement plus petit que 1,

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{z^n}{n^\alpha}=\frac{z}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1-ze^{-t}}dt.$$

3. Conclure.

Formule sommatoire de Poisson. ([QZ], p.93, [CFM] p.98, [Go] p.269) ([D: 35, 39, 40, 41, 46, 47]) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue et de classe C^1 par morceaux vérifiant

$$\max(|f(x)|,|f'(x)|)=\mathcal{O}(1/x^\alpha) \qquad \text{quand } |x|\to+\infty$$

où $\alpha>1$. On se propose de montrer que, sous ces conditions, si $\widehat{f}(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-itx}dt$, nous avons la formule suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^\infty f(n)=\sum_{-\infty}^\infty\widehat{f}(2\pi n).$$

1. Montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^\infty f(x+n)$ converge uniformément sur tout intervalle compact vers une fonction $F(x)$ continue de classe C^1 par morceaux et $1-$périodique.
2. Calculez le développement en série de Fourier de F. Conclure.
3. Applications ([QZ], p.116). Soit $a>0$. Montrez que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{a}\coth\pi a.$$

(appliquer la formule de poisson à $f(x)=e^{-2\pi a|x|}$).
([Go], p.269) Montrer que

$$\forall s>0, \qquad \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-\pi n^2 s}=s^{-1/2}\sum_{k=-\infty}^\infty e^{-\pi k^2/s}.$$

(appliquer la formule de Poisson à la fonction $f(x) = e^{-ax^2}$; il sera utile d'introduire la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2+zt}dt$, montrer qu'elle est holomorphe, et la déterminer sur $\mathbb{R}$ grâce à un changement de variable).

On note, pour $x \in]-1,1[$, $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}$. Cette série entière est appelée la fonction thêta de Jacobi. Donner un équivalent lorsque $x \to 1$ de $\Theta(x)$.

Prolongement holomorphe de la fonction ζ de Riemann. ([QZ] p.28, [Go] p.278) ([D: 7, 30, 35, 39, 41, 45, 47]) On admet ici l'identité fonctionnelle (corollaire de la formule sommatoire de Poisson)

$$\forall t > 0, \qquad \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right), \qquad \text{où } \theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que Re $s > 1$, on note

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Cette fonction est appelée *Fonction zêta de Riemann.*

1. Montrez que, si $s \in \mathbb{C}$ est tel que Re $s > 1$, alors $\zeta(s)$ est bien défini.

Montrez que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \pi^{\frac{s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1}dy.$$

2. On considère pour $t > 0$, la fonction

$$\widetilde{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$

Montrez que :

$$\forall t \geq 1, \qquad \widetilde{\theta}(t) \leq \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi}}$$

et que

$$\forall t > 0, \qquad \widetilde{\theta}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\widetilde{\theta}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2}.$$

Montrez que

$$\int_0^1 \widetilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1}dy = \int_1^{\infty} \widetilde{\theta}(u) u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}du + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

En déduire que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{s/2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) + \psi(s)$$

où ψ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

3. En déduire que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, nulle aux entiers $-2, -4, -6, \ldots$ et admettant un pôle simple en 1.

4. Déduire de la question 2 que

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \qquad \zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s).$$

5. On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers premiers. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$, Re $s > 1$ implique

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

En déduire que ζ n'a pas de zéro sur $\{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 1\}$. Déduire de la question précédente que tous les zéros de la fonction ζ sont de deux types : les entiers -2, -4, -6, ... et les autres zéros qui sont dans la bande $\{z \in \mathbb{C},\ 0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1\}$.

6. Montrer que, pour $s \in \mathbb{R}$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1) \qquad \text{quand } s \to 1.$$

Montrez que

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty.$$

Noyau de Bergman. ([Roos], p.232). ([D: 1, 5, 13, 34, 35, 39, 41, 43, 45, 46, 47]) On note Δ le disque unité de $\mathbb{C}$ et λ la mesure de Lebesgue sur Δ divisée par π (ce qui nous donne $\lambda(\Delta) = 1$.) Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace de Bergman

$$H^p(\Delta) = L^p(\Delta) \cap \mathcal{H}(\Delta)$$

muni de la norme

$$\|g\|_p = \left(\int_\Delta |g|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Soit $\epsilon > 0$. Montrez que si $g \in \mathcal{H}(\epsilon\Delta)$ alors $g(0) = \dfrac{4}{\epsilon^2} \displaystyle\int_{\frac{\epsilon}{2}\Delta} g d\lambda$.

2. Soit K un compact de δ et soit $\delta = d(K, \partial\Delta) > 0$. Montrer l'existence d'une constante C_p ne dépendant que de p et indépendante de K telle que pour toute fonction $f \in H^p(\Delta)$,

$$\sup_K |f| \leq \frac{C_p}{\delta^2} \|f\|_p.$$

En déduire que H^p est un espace de Banach.

3. On suppose maintenant que $p = 2$. Montrez que :

$$\forall f \in \mathbb{H}^2(\Delta), \qquad \forall z \in \Delta, \qquad |f(z)| \leq \frac{4}{(1 - |z|)^2} \|f\|_2.$$

Déduire du théorème de représentation de Riesz que, pour tout $z \in \Delta$, il existe un unique $K_z \in H^2(\Delta)$ tel que

$$\forall f \in H^2(\Delta), \qquad f(z) = \int_\Delta f \overline{K_z} d\lambda.$$

4. On pose, pour $z, w \in \Delta$, $K(z, w) = \overline{K_z(w)}$. Soit $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $H^2(\Delta)$. Montrez que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi_k(z)} \varphi_k(w)$$

converge uniformément sur tout compact de Δ vers $K(z,w)$.
5. Montrez qu'une fonction $f : \Delta \to \mathbb{C}$ appartient à $H^2(\Delta)$ si et seulement si son développement en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ vérifie

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} > +\infty.$$

En déduire que la famille $\varphi_n(z) = \sqrt{n+1}\, z^n$ forme une base hilbertienne de $H^2(\Delta)$ et que

$$K(z,w) = \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2}.$$

Remarque. Le noyau de Bergman possède aussi une expression explicite si on ne se place plus dans Δ mais dans un domaine simplement connexe pour lequel on connat une application conforme dans Δ. Voir [Roos]

Bibliographie.

[**An**] M. Andersson, Topics in complex analysis, Springer.
[**AAR**] G. Andrews, R. Askey and R. Roy, Special functions, Encyclopedia of Maths and its App. 71, Cambridge
[**CFM**] A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1, Masson.
[**Go**] X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Ellipses.
[**H**] L. Ahlfors, *Complex analysis*, Mc Graw Hill, 1979.
[**L**] S. Lang, *Complex analysis*, Graduate Texts in Mathematics 103, Springer.
[**Po**] A. Pommellet, *Agrégation de Mathématiques, Cours d'Analyse*, Ellipses, 1994.
[**QZ**] H. Queffelec, C. Zuily, Analyse pour l'agrégation.
[**Roos**] G. Roos, Analyse et Géométrie, Dunod.
[**Ru**] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson.