Solution de l'exercice 2.2

Soit $z = x + iy$ et

$$f(z) = f_1(x,y) + if_2(x,y), \qquad g(z) = g_1(x,y) + ig_2(x,y).$$

On veut montrer que

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(z) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z))\frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f(z))\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z).$$

On a : $g\circ f = (g_1\circ f) + i(g_2\circ f)$ et

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(z) &= \frac{\partial(g_1\circ f)}{\partial x}(z) + i\frac{\partial(g_2\circ f)}{\partial x}(z) - i\frac{\partial(g_1\circ f)}{\partial y}(z) + \frac{\partial(g_2\circ f)}{\partial y}(z)\\
&= \frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x} + i\frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x} \qquad (0.1)\\
&\quad - i\frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} - i\frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y},
\end{aligned}$$

où toutes les fonctions en f_i sont évaluées en z et toutes les fonctions en g_i sont évaluées en $f(z)$, $i = 1, 2$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
&4\frac{\partial g}{\partial z}(f(z))\frac{\partial f}{\partial z}(z) + 4\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f(z))\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z)\\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(f(z)) - i\frac{\partial g}{\partial y}(f(z))\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(f(z)) + i\frac{\partial g}{\partial y}(f(z))\right)\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(z) - i\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}(z)\right)\\
&= \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + i\frac{\partial g_2}{\partial x} - i\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x} - i\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) \qquad (0.2)\\
&+ \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + i\frac{\partial g_2}{\partial x} + i\frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - i\frac{\partial f_2}{\partial x} - i\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

où toutes les fonctions en f_i sont évaluées en z et toutes les fonctions en g_i sont évaluées en $f(z)$, $i = 1, 2$. Il reste à développer (0.2) et vérifier que l'on retrouve deux fois l'expression (0.1).

Pour obtenir la 2ieme égalité, il suffit d'utiliser la 1ere et l'exercice 2.1.

Si f et g sont holomorphes, alors $\partial g/\partial\overline{z} = 0$ et $\partial f/\partial\overline{z} = 0$ et la 2ieme égalité montre que $\partial(g\circ f)/\partial\overline{z} = 0$. La relation $(g\circ f)' = (g'\circ f)f'$ se déduit de la 1ere égalité.