Agrégation de Mathématiques Université d'Aix-Marseille 2023-2024

Analyse complexe

Table des matières

Quelques références classiques :

– Ahlfors, Complex analysis, McGraw Hill
– Cartan, Théorie élém. des fonctions anal. d'une ou plusieurs var. complexes, Hermann
– Dolbeault, Analyse complexe, Masson
– Lang, Complex analysis, Springer
– Queffelec Zuily, Analyse pour l'agrégation, Dunod
– Rudin, Analyse réelle et complexe, Dunod

Notions abordées :

– **Séries entières** : Rayon de convergence, d'Alembert, Cauchy, Hadamard

– **Fonctions analytiques** : exemple des séries, zéros isolés, ppe du maximum

– **Fonctions holomorphes** : exemple des séries, l'opérateur $\overline{\partial}$, primitive des séries

– **Fonction exponentielle**, Arguments, Logarithmes, Racines carrées, Puissances

– **Intégrale de Cauchy et analyticité des fonctions hol.** : Intégrale sur un chemin, indice, Goursat, Primitives, Thm et formule de Cauchy, Anal. des fcts holom., Morera

– **Ptés des fcts holom.** : Estim. de Cauchy, Schwarz, intégrales à param., Weierstrass

– **Singularités isolées des fonctions holom.** : sing. artificielles, classification, série de Laurent, Résidus, Fonctions méromorphes

– **Applications de la formule des Résidus** : Nombre de zéros et poles, Application ouverte, Calcul d'intégrales

Programme Agreg

1. Séries entières
Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.
Fonctions analytiques sur un ouvert. Principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques. Composition.
Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe. Développement en série entière des fonctions usuelles.
2. Fonctions d'une variable complexe
Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin C^1 par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. Déterminations du logarithme.
Indice d'un chemin fermé C^1 par morceaux par rapport à un point.
Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.
Singularités isolées. Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.
Suites et séries de fonctions holomorphes.

Dans la suite, les résultats encadrés sont à connaitre par coeur.

1 Séries entières

Références : Gourdon, Analyse et Pommellet, Cours d'Analyse.

Notation : Dans toute la suite, pour $a \in \mathbb{C}$ et $R \geq 0$, on note :
- $D(a, R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a| < R\}$ le disque ouvert de centre a et de rayon R.
- $\overline{D}(a, R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a| \leq R\}$ le disque fermé de centre a et de rayon R.
- $D'(a, R)$ le disque épointé de centre a et de rayon R

Définition 1.1. On appelle *série entière* toute série de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ où z est une variable complexe et $(a_n)_n$ est une suite de nombres complexes.

Lemme 1.2 (Lemme d'Abel)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Alors*
1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
2) La série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ converge normalement dans $\overline{D}(0, r)$, $r < |z_0|$.

Preuve. En effet, si M est un majorant de $|a_n z_0|^n$ avec $|z_0| > 0$, on a, pour $|z| < |z_0|$:

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \, |z/z_0|^n \leq M \, |z/z_0|^n .$$

1) et 2) sont alors immédiats. □

Définition 1.3. Rayon de convergence et disque de convergence Si $\sum_n a_n z^n$ est une série entière, le nombre

$$R = \sup \{ r \geq 0, \text{ la suite } (|a_n| r^n)_n \text{ est bornée} \}$$

s'appelle le *rayon de convergence* de $\sum_n a_n z^n$ et $D(0, R)$ son *disque de convergence.*

Il découle du lemme d'Abel que :
- pour tout $z \in D(0, R)$, $\sum_n a_n z^n$ converge absolument.
- pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$, la série diverge.
- La série entière $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$, pour tout $r < R$.

Dans la suite, on adopte la convention que $1/\lambda = 0$ si $\lambda = \infty$ et $1/\lambda = \infty$ si $\lambda = 0_+$.

Calcul pratique du rayon de convergence :

Règle de d'Alembert. Si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \lambda \in [0, \infty]$, alors $R = 1/\lambda$.

Règle de Cauchy. Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda \in [0, \infty]$, alors $R = 1/\lambda$.

Formule d'Hadamard. $R = 1/\lambda$ avec $\lambda = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

Preuve. *Règle de d'Alembert.* L'existence de la limite λ implique qu'il existe un rang à partir duquel $(a_n)_n$ ne s'annule pas. Si $\lambda = 0$, montrons que $R = \infty$. Il suffit de montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(a_n z^n)_n$ est bornée. Pour $z \neq 0$, on a

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

On en déduit que $\left| a_{n+1} z^{n+1} / a_n z^n \right| \leq 1$ pour n grand, et donc $(|a_n z^n|)_n$ est bornée.

Si $\lambda = \infty$, montrons de même que $R = 0$. Il suffit de montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée. Or, on a

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| \longrightarrow \infty \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

On en déduit que $\exists N > 0$, $\forall n \geq N$, $\left| a_{n+1} z^{n+1} / a_n z^n \right| \geq 2$, et donc, pour $n \geq N$,

$$|a_n z^n| \geq 2^{n-N} |a_N| \longrightarrow \infty \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Exercice 1.4. 1. *Terminer la preuve : Montrez que, si* $\lambda \in]0, \infty[$, *alors pour* $r < 1/\lambda$ *et pour* $z \in \overline{D}(0, r)$ *la suite* $(a_n z^n)_n$ *est bornée et que pour* $r > 1/\lambda$ *et pour* z *tel que* $|z| \geq r$, *la suite* $(a_n z^n)_n$ *n'est pas bornée.*
2. *Montrez la règle de Cauchy pour les séries entières.*

Preuve de la règle d'Hadamard. On rappelle que

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|^{1/k}.$$

Si $\lambda = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ et on est ramené à Cauchy.
Si $\lambda = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty$, alors

$$\forall A > 1, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad \exists k \geq n \qquad |a_k|^{1/k} \geq A.$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $A > 1/|z|$. On a alors :

$$\forall n \geq N, \quad \exists k \geq n \quad |a_k||z|^k = \left(|a_k|^{1/k}|z|\right)^k \geq (A|z|)^k \longrightarrow \infty, \qquad \text{quand } k \to \infty,$$

ce qui montre que la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée, et donc que $R = 0 = 1/\lambda$.

Exercice 1.5. *Terminer la preuve : montrez, si* $\lambda \in]0, \infty[$, *que* $\forall r < 1/\lambda$, $\forall z \in \overline{D}(0, r)$, *la suite* $(a_n z^n)_n$ *est bornée et que* $\forall r > 1/\lambda$ *et pour tout* z *tel que* $|z| \geq r$, *la suite* $(a_n z^n)_n$ *n'est pas bornée.*

Remarque. La formule d'Hadamard permet de calculer le rayon de convergence de **toutes** les séries entières $\sum_n a_n z^n$ dont on connaît la suite $(a_n)_n$ des coefficients.

Théorème 1.6. Somme et produit de séries entières. *Soient* $f(z) = \sum_n a_n z^n$ *et* $g(z) = \sum_n b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de conv. resp. égal à* $R > 0$ *et* $R' > 0$.

Somme. *La série entière* $\sum_n c_n z^n$ *définie par* $c_n = a_n + b_n$ *est appelée somme des séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$. *Son rayon de convergence* R'' *vérifie* $R'' \geq \min(R, R')$.
Sur $D(0, R'')$, $(f + g)(z) = \sum_n c_n z^n$.

Produit. *La série entière* $\sum_n d_n z^n$ *définie par* $d_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ *est appelée produit des séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$. *Son rayon de convergence* R'' *vérifie* $R'' \geq \min(R, R')$.
Sur $D(0, R'')$, $(fg)(z) = \sum_n d_n z^n$.

Preuve. La série $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge pour $|z| < \min(R, R')$ vers $f(z) + g(z)$, d'où le résultat en ce qui concerne la somme.
Pour le produit, montrons que, pour $|z| < \min(R, R')$, $\sum d_n z^n$ converge absolument. Si l'on pose $\varepsilon_n^k = 1$ si $k \in \{0, \ldots, n\}$ et $\varepsilon_n^k = 0$ sinon, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_n||z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}||z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z|^k \varepsilon_n^k |b_{n-k}||z|^{n-k}.$$

Le théorème de Tonnelli permet d'échanger les sommes portant sur n et sur k (car les termes de la série double sont positifs). La dernière expression est donc égale à

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_k||z|^k \varepsilon_n^k |b_{n-k}||z|^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} |a_k||z|^k |b_{n-k}||z|^{n-k}.$$

Posant $\ell = n - k$ dans la dernière somme, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}|a_k||z|^k|b_\ell|z|^\ell = \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k||z|^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}|b_\ell|z|^\ell\right) < \infty.$$

Le théorème de Fubini nous permet alors d'écrire, pour $|z| < \min(R, R')$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} a_k z^k b_\ell z^\ell = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell z^\ell\right) = f(z)g(z). \quad \square$$

Remarque. On ne peut rien dire de plus en général sur les rayons de convergence de la somme ou du produit de deux séries entières. Par exemple, les séries entières $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ ont leur rayon de convergence égal à 1 mais la somme a un rayon de convergence infini. De même, les séries entières $\sum z^n$ et $1 - z$ ont pour rayon de convergence 1 et $+\infty$, mais le produit des deux séries entières, qui est 1, a pour rayon de convergence $+\infty$. Par contre, si $R \neq R'$, le rayon de convergence de la somme est égal à $\min(R, R')$.

Théorème 1.7. Continuité de $z \mapsto \sum a_n z^n$ sur son disque de convergence. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $f(z)$ la somme de la série. Alors $f(z)$ est continue sur le disque de convergence.*

Preuve. En effet, pour tout $r < R$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $|z| \leq r$, sa somme est donc continue sur $|z| \leq r$ car chaque somme partielle est continue. $\square$

Remarque. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série de rayon R. Alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + o(z^N) \quad \text{quand } z \to 0.$$

En effet, $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n = z^{N+1}\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^{n-N-1}$ où la dernière série a pour rayon R.

Remarque. On ne peut rien dire de particulier sur la convergence de la série sur le cercle de convergence. La série $\sum z^n/n^2$ converge en tous les points du cercle unité, et, à l'opposé, la série $\sum nz^n$ ne converge en aucun point du cercle. Lusin (1911) a donné un exemple de série $\sum a_n z^n$ de rayon 1, avec $a_n \to 0$, qui ne converge en aucun point du cercle (mais c'est plus compliqué à construire).

Et pour finir, un résultat classique sur les séries entières (pour la preuve, voir les exos).

Théorème 1.8 (Abel)**.** *Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série de rayon 1 telle que $\sum a_n = L$ converge. Alors $f(x) \to L$ quand $x \to 1$ avec x réel < 1.*

2 Fonctions analytiques sur un ouvert

Définition 2.1. Fonctions analytiques. Soit f une fonction d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f est *analytique* sur U si, pour tout $z_0 \in U$, il existe un voisinage U_{z_0} de z_0 inclus dans U tel que, dans ce voisinage, il existe une série entière $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ qui converge dans U_{z_0} et telle que f soit la somme de cette série entière.

Proposition 2.2. *Une série entière est analytique sur son disque de convergence.*

Preuve. Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $|z_0| < R$ et $s < R - |z_0|$. On montre que f est développable en série entière dans le disque $D(z_0, s)$. Soit $z \in D(z_0, s)$. Alors

$$f(z) = \sum_n a_n (z_0 + (z - z_0))^n = \sum_n a_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_0^{n-k} (z - z_0)^k. \tag{2.1}$$

La série $\sum_n |a_n| \sum_{k=0}^n C_n^k |z_0|^{n-k} |z - z_0|^k = \sum_n |a_n| (|z_0| + |z - z_0|)^n$ est convergente puisque $|z_0| + |z - z_0| < R$, donc on peut permuter les sommations dans (2.1), ce qui donne

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n C_n^k z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k,$$

qui est le développement de $f(z)$ en une série convergente dans $D(z_0, s)$. □

Proposition 2.3. Principe des zéros isolés. *Les zéros d'une fonction analytique f non nulle sur un ouvert connexe U sont isolés (i.e. tout zéro admet un voisinage dans lequel f n'a pas d'autre zero).*

Remarque. Un exemple “limite” est le suivant : soit $U = D(0, 1)$ et $f(z) = \sin((z - 1)^{-1})$, alors $f \in H(U)$ est non nulle et s'annule aux points $1 - 1/n\pi$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cette suite de zéros admet 1 comme point d'accumulation mais $1 \notin U$.

Preuve. Soit Z l'ensemble des zéros de f dans U. Soit $a \in Z$ et $r > 0$ tel que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \qquad z \in D(a, r) \subset U.$$

1) Supposons qu'il existe $c_m \neq 0$ (on choisit celui de plus petit indice) et définissons

$$g(z) = (z - a)^{-m} f(z), \quad z \in U \setminus \{a\}, \quad \text{et} \quad g(a) = c_m.$$

Alors

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k} (z - a)^k, \qquad z \in D(a, r),$$

et g est analytique dans U (en dehors de $D(a, r)$, $(z - a)^{-m}$ et f le sont). La continuité de la fonction g montre qu'elle n'a pas de zéros dans un voisinage de a et donc a est un zéro isolé de f.

2) Si tous les c_n sont nuls alors a est évidemment un point d'accumulation de Z dans U. Soit A l'ensemble des points d'accumulation de Z dans U. Montrons que $A = \emptyset$. Comme f est continue, $A \subset Z$. Soit $a \in A$, d'après ce qui précède, il faut que tous les coefficients c_n soient nuls, ce qui montre que A est ouvert. Mais A est aussi fermé, car le complémentaire A^c est ouvert : soit $z \in A^c$. Il existe un voisinage épointé V sans zéro de f, donc $V \subset A^c$. Comme U est connexe, soit $A = U$ mais f serait nulle, donc $A = \emptyset$ et les zéros de f sont isolés. □

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.4. Principe du prolongement analytique. *Soient f et g deux fonctions analytiques dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, qui coïncident sur un ensemble A qui a un point d'accumulation dans U. Alors $f = g$ dans U.*

Proposition 2.5. Principe du maximum. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f analytique dans U et $a \in U$. Alors, ou bien f est constante dans U, ou bien tout voisinage de a contient un point b tel que $|f(b)| > |f(a)|$.*

Preuve. Supposons qu'il existe $R > 0$ tel que $D(a, R) \subset U$ et tel que $|f(z) \leq |f(a)|$ pour tout $z \in D(a, R)$. Si on fixe $r \in [0, R[$ la fonction $\theta \in \mathbb{R} \mapsto f(a + re^{i\theta})$ est continue, $2\pi-$périodique. Nous pouvons donc la développer en série de Fourier :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(a + re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Or, on peut écrire, pour $|z - a| = r$ avec r assez petit, que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta},$$

où la série converge uniformément sur $\overline{D}(a, r)$. Ceci donne, par unicité de la série de Fourier,

$$\forall n < 0, \qquad c_n = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 0, \qquad c_n = a_n r^n.$$

Avec l'identité de Parseval, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq |f(a)|^2 = |a_0|^2,$$

ce qui entraine $a_1 = a_2 = \cdots = 0$, donc f est constante dans U. □

Corollaire 2.6. Principe du maximum bis. *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur U, continue sur $\overline{U}$. Alors*

$$\sup_{\overline{U}} |f| = \sup_{\partial U} |f|,$$

autrement dit le maximum du module de f est atteint sur le bord de U.

Preuve. Tout d'abord, $|f|$ atteint son maximum sur $\overline{U}$ car $\overline{U}$ est compact et $|f|$ est continue sur $\overline{U}$. Si le maximum de $|f|$ est atteint en un point intérieur à U, alors on est ramené au principe du maximum précédemment prouvé que l'on applique dans la composante connexe contenant ce point. □

Le résultat précédent ne s'applique pas si U est non borné, comme le montre l'exemple de la fonction e^{-z^2} analytique dans le demi-plan supérieur, bornée sur $\mathbb{R}$, mais non bornée le long de l'axe imaginaire. Cependant le résultat s'applique si on considère la sphère de Riemann à la place de $\mathbb{C}$ et si f est analytique à l'infini, c'est à dire f admet un développement de la forme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / z^n$ au voisinage de l'infini (cf. Ransford, Potential theory in the complex plane, p.6). Par exemple, $f(z) = 1/z$ est analytique à l'infini, avec $f(\infty) = 0$. Son maximum sur le complémentaire du disque unité est atteint sur sa frontière, c'est à dire le cercle unité.

3 Fonctions holomorphes ou $\mathbb{C}-$dérivables

Définition 3.1. Fonctions holomorphes (du grec holos : entier et morphe : forme). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est $\mathbb{C}-$*dérivable* en $z_0 \in U$ lorsque

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. On note $f'(z_0)$ cette limite. On dit que f est *holomorphe* sur U lorsque f est $\mathbb{C}-$dérivable en tout point z_0 de U. On note $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes de U dans $\mathbb{C}$.

Proposition 3.2. *L'ensemble $H(U)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert U muni de l'addition, de la multiplication et de sa structure de $\mathbb{C}-$espace vectoriel est une algèbre. Autrement dit, toute combinaison linéaire finie de fonctions holomorphes est holomorphe et le produit de deux fonctions holomorphes est holomorphe.*

Preuve. La définition de la dérivée complexe est similaire à celle des fonctions réelles. Il en découle que les propriétés élémentaires de la dérivation complexe peuvent s'obtenir de manière identique. Ainsi, on peut prouver les identités habituelles sur les dérivées (voir un cours d'analyse complexe) :

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z), \quad (cf)'(z) = cf'(z), \quad (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z). \quad \square$$

Proposition 3.3. La composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe. *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f \in H(U)$, $g \in H(V)$ telles que $f(U) \subset V$.*
Alors $g \circ f \in H(U)$ et $\forall z \in H$, $(g \circ f)'(z) = (g' \circ f)(z) f'(z)$.

Preuve. Voir un cours d'analyse complexe. $\square$

On vérifie facilement à partir de la définition que la fonction $1/z$ est holomorphe en dehors de 0. Par composition, on en déduit que si f est holomorphe alors $1/f$ est holomorphe en dehors des zéros de f, et que $(1/f)'(z) = -f'(z)/f^2(z)$.

Une conséquence pratique de tout ce qui précéde est que l'on dérive les fonctions holomorphes par rapport à la variable z comme on dérive les fonctions réelles de la variable x.

Théorème 3.4. Les séries entières sont holomorphes. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la somme $f(z)$ de cette série définit une fonction holomorphe sur le disque de convergence $D(0, R)$. De plus, pour tout $z_0 \in D(0, R)$,*

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}.$$

Preuve. Les série entières $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ et $\sum_n a_n z^n$ ont les mêmes rayons de convergence par application de la règle d'Hadamard. Montrons maintenant que, si $z_0 \in D(0, R)$ la fonction f est $\mathbb{C}-$dérivable en z_0 et

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}.$$

Soit $z \in D(0,R)$ tel que $z \neq z_0$. Alors

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}$$

Si $|z| < r$ et $|z_0| < r$ avec $r < R$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z^k||z_0|^{n-1-k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} r^k r^{n-1-k} = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} < \infty.$$

On en déduit que, si z_0 est fixé avec $|z_0| < r < R$, alors la série

$$z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}$$

converge normalement sur $D(0,r)$. Donc

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ |z|<r}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z_0^{n-1}.$$

On en déduit le théorème. $\square$

Par récurrence, on obtient :

Corollaire 3.5. *Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa somme est $\mathbb{C}-$dérivable à tous les ordres sur son disque de convergence, et, pour tout n, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ (en particulier, le développement d'une série est unique). La fonction f est donc la somme de sa série de Taylor :*

$$\forall z \in D(0,R), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Remarque : Comme toute série entière est holomorphe sur son disque de convergence, on en déduit que **toute fonction analytique sur un ouvert y est holomorphe**. On a aussi que si f est analytique en un point, f est analytique dans un voisinage de ce point. Ceci n'est pas vérifié pour l'holomorphie comme le montre l'exemple $f(z) = |z|^2$ qui est holomorphe en 0 mais dans aucun voisinage de 0. La théorie de Cauchy (Chapitre 6) montre que les propriétés d'analyticité et d'holomorphie dans un ouvert sont équivalentes.

Nous étudions maintenant les conditions nécessaires et suffisantes sur les dérivées partielles d'ordre un pour qu'une fonction soit holomorphe. On introduit les opérateurs différentiels

$$\overline{\partial} := \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \partial := \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{3.1}$$

On peut justifier ces définitions de la manière suivante. En variables réelles, la base des formes différentielles (dx, dy) est la base duale de la base de vecteurs tangeants $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ dans le sens où

$$dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 1, \quad dx\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = 0, \quad dy\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 0, \quad dy\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = 1.$$

Alors, avec les définitions (3.1), on vérifie que la base $(dz, d\overline{z})$, avec

$$dz = dx + idy, \qquad d\overline{z} = dx - idy,$$

est aussi duale de la base $(\partial, \overline{\partial})$. Remarquer aussi que

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1.$$

En pratique, on peut donc dériver une expression en z et $\overline{z}$ par rapport à z ou $\overline{z}$ comme si z et $\overline{z}$ étaient deux variables indépendantes (bien qu'elles ne le soient pas).

Théorème 3.6. Conditions de Cauchy-Riemann. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. La fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur U si et seulement si f est différentiable sur U et*

$$\forall z \in U, \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0.$$

Preuve. Si f est holomorphe, alors pour $z_0 \in U$,

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

On a donc, quand $z \to z_0$,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0),$$

ce qui montre que f est différentiable en z_0 et pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$

$$d_{z_0} f(h, k) = f'(z_0)(h + ik).$$

Comme

$$d_{z_0} f(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) k, \tag{3.2}$$

on en déduit, en faisant $k = 0$ et $h \neq 0$, puis $h = 0$ et $k \neq 0$, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = if'(z_0), \qquad \text{donc que} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$$

Réciproquement, supposons f différentiable en z_0 et $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$, et montrons que f est $\mathbb{C}-$dérivable en z_0. Si on pose $\zeta = h + ik$ alors $h = (\zeta + \overline{\zeta})/2$ et $k = (\zeta - \overline{\zeta})/(2i)$ et (3.2) s'écrit

$$d_{z_0} f(h, k) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(\zeta + \overline{\zeta}) - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(\zeta - \overline{\zeta}) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\zeta + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{\zeta} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\zeta,$$

donc

$$f(z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

quand $z \to z_0$, ce qui montre que

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existe et vaut} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z_0). \qquad \square$$

Corollaire 3.7. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable et $z_0 \in U$. La différentielle*

$$d_{z_0} f(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)k$$

se réécrit, avec $w = h + ik$, $$d_{z_0} f(h,k) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)w + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{w}. \tag{3.3}$$

En particulier, f est holomorphe sur U si et seulement si f est différentiable sur U et sa différentielle $w \mapsto d_{z_0} f(w) = d_{z_0} f(h,k)$ est $\mathbb{C}-$linéaire en tout point de U. D'un point de vue géométrique, $d_{z_0} f$ est une similitude directe, composée d'une rotation d'angle $\arg f'(z_0)$ et d'une homothétie de rapport $|f'(z_0)|$.

Si f est holomorphe sur U, pour tout $z_0 \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0).$$

Si $f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$, l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ dans U s'écrit

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Corollaire 3.8. *Si f est holomorphe dans un ouvert connexe U et $f'(z) = 0$ dans U alors f est constante dans U.*

Preuve. Soit $z_0 \in U$ et $D = D(z_0, r) \subset U$. Soit $z \in D$. La fonction f est constante du point z_0 au point $\mathrm{Re}\,(z) + i\mathrm{Im}\,(z_0)$ puisque $\partial f/\partial x = 0$, et elle est aussi constante de $\mathrm{Re}\,(z) + i\mathrm{Im}\,(z_0)$ à z puisque $\partial f/\partial y = 0$. Donc $f(z) = f(z_0)$. Cela prouve que f est localement constante. On obtient le résultat en appliquant le rappel de topologie qui suit.

Rappel de Topologie. *Soit $f : T \to M$ une application continue d'un espace métrique connexe T dans un espace métrique. Si f est localement constante alors elle est constante.*

Preuve. Soit $x_0 \in T$. On considère l'ensemble

$$A = \{x \in T,\ f(x) = f(x_0)\}.$$

Il est ouvert puisque f est localement constante. Il est fermé puisque f est continue. Il n'est pas vide ($x_0 \in A$), donc, T étant connexe, on a $A = T$ et f est constante. $\square$

Proposition 3.9. Les fonctions holomorphes sont harmoniques. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. Alors f, $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont harmoniques (c'est à dire qu'elles annulent le laplacien Δ). De plus pour toute fonction g de classe $C^2(U)$ à valeurs complexes, on a*

$$\Delta g = 4\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2 g}{\partial \overline{z} \partial z}.$$

En fait, nous verrons plus loin que les fonctions holomorphes sont de classe C^∞.

Primitives. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Une *primitive* de f est une fonction $F \in H(U)$ telle que $F' = f$ dans U.

Proposition 3.10. Primitives des séries entières. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f la somme de cette série. Alors f admet une primitive F. Toute primitive F est de la forme*

$$\forall z \in D(0,R), \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + C, \qquad C \in \mathbb{C}.$$

Preuve. Il est clair que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n/(n+1))z^{n+1}$ a pour rayon de convergence R. Notons F la somme de cette série entière. Le théorème 3.4 montre que F est holomorphe et que, pour tout $z \in D(0,R)$, $F'(z) = f(z)$. De plus si une autre fonction F_1 vérifie $F_1' = f$ dans $D(0,R)$ alors F et F_1 diffèrent d'une constante. □

4 Fonction exponentielle complexe

Référence : Rudin, Analyse Réelle et Complexe.

Définition 4.1. Fonction exponentielle complexe. On définit

$\forall z \in \mathbb{C},\ \exp z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, de rayon infini, et on a $\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w, \quad w, z \in \mathbb{C}$.

Deux preuves de l'égalité précédente. 1) Avec calculs :

$$\exp(z+w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{k!} C_k^{\ell} z^{\ell} w^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\ell!(k-\ell)!} z^{\ell} w^{k-\ell}.$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\ell!(k-\ell)!} |z|^{\ell} |w|^{k-\ell} = \exp(|z|+|w|) < +\infty.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\exp(z+w) &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{1}{\ell!(k-\ell)!} z^{\ell} w^{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!k!} z^{\ell} w^{k} = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right) \\ &= \exp z \cdot \exp w.\end{aligned}$$

2) Sans calcul : On suppose l'identité connue pour $z, w \in \mathbb{R}$. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{R}$, l'égalité est vérifiée car e^{z+w} et $e^z e^w$ sont deux fonctions entieres de z qui coincident sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{C}$. Ensuite, pour $w \in \mathbb{C}$ fixé, e^{z+w} et $e^z e^w$ sont toujours deux fonctions entieres de z qui coincident sur $\mathbb{R}$ (par l'assertion précédente) donc sur $\mathbb{C}$. □

Théorème 4.2. *(a) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp z \neq 0$.*
(b) $\exp$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\exp' = \exp$.
(c) la restriction de la fonction exponentielle à $\mathbb{R}$ est une fonction positive croissante et

$$\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$$

(d) Soit $\cos t = \mathrm{Re}\,(\exp it)$ *et* $\sin t = \mathrm{Im}\,(\exp it)$*. On a*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On en déduit que cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$*, que* $\cos' = -\sin$ *et* $\sin' = \cos$*, et*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

(e) Il existe un nombre positif π *tel que* $e^{2i\pi} = 1$*. En particulier, la fonction exponentielle est périodique, de période* $2\pi i$*.*
(f) On a $\exp z = 1$ *si et seulement si* $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$*.*
(g) L'application $t \mapsto \exp(it)$ *est une surjection de l'axe réel sur le cercle unité.*
(h) Soit $w \in \mathbb{C}^*$*. Il existe un nombre complexe* z *tel que* $\exp z = w$*.*
(i) $\pi = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} dt$*.*

Preuve. (a) Si $z \in \mathbb{C}$, $\exp z \cdot \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp 0 = 1$, donc $\exp z \neq 0$.
(b) est évident. (c) est évident aussi car, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\exp x \geq 1 + x \longrightarrow +\infty \text{ et } \exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \longrightarrow 0, \qquad \text{quand } x \to +\infty.$$

(d) On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

donc cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. Pour t réel, on a

$$\overline{\exp(it)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{it})^n}{n!} = \exp(-it),$$

où on a utilisé la continuité de l'application $z \mapsto \overline{z}$, donc

$$|\exp(it)|^2 = \exp(it) \cdot \overline{\exp(it)} = \exp(it) \cdot \exp(-it) = \exp(it - it) = \exp 0 = 1.$$

De $|\exp(it)| = 1$, on déduit : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
(e) Soit $t = 2$. On voit facilement que $\cos 2 < -1/3$. Comme $\cos 0 = 1$ et cos est continue, il existe un plus petit nombre positif t_0 tel que $\cos t_0 = 0$. Soit $\pi := 2t_0$. On a $\sin t_0 = \pm 1$ mais $\sin' t > 0$ sur $(0, t_0)$ donc $\sin t_0 > 0$ donc $\sin t_0 = 1$. Donc $e^{i\pi/2} = i$ donc $e^{2i\pi n} = 1$ pour n entier, ce qui montre (e).
(f) Pour la preuve de $\exp z = 1 \implies z \in 2i\pi\mathbb{Z}$ voir la preuve de Rudin.
(g) Notons $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1\}$. On vérifie que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(it) \in \mathbb{T}$ est bien une surjection. Soit donc $w = u + iv \in \mathbb{T}$ avec u, v réels.
Supposons d'abord $u \geq 0$ et $v \geq 0$. Puisque $0 \leq u \leq 1$, et que $\cos 0 = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, il existe $t \in [0, \pi/2]$ tel que $u = \cos t$. Comme $0 \leq v = \sqrt{1 - u^2}$ et que sin est positive sur $[0, \pi]$, on a alors $v = \sin u$, donc $w = \exp(iu)$. Si $u < 0$ et $v \geq 0$, les conditions précédentes sont satisfaites par $-iw$. Donc il existe un réel t tel que $\exp(it) = -iw$, et $w = \exp(i(t + \pi/2))$. Enfin, si $v < 0$, les deux cas précédents montrent que $-w = \exp it$

pour un t réel, d'où $w = e^{i(t+\pi)}$, ce qui achève la démonstration de (g).

(h) Soit $w \in \mathbb{C}^*$. La fonction exp étant surjective strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp x = |w|$. De plus, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(iy) = w/|w|$. On en déduit que $\exp(x + iy) = \exp x \cdot \exp(iy) = w$.

(i) La fonction $\varphi : t \in]-\pi/2, \pi/2[\mapsto \sin t/\cos t \in]-\infty, \infty[$ est strictement croissante, définie, dérivable, et bijective de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$. De $\varphi' = 1 + \varphi^2$, on déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi'(t)}{1+\varphi^2(t)} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi. \qquad \square$$

5 Arguments, Logarithmes, Racines carrées, Puissances

Définition 5.1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle *logarithme* de z tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $\exp w = z$. On appelle *argument* de z tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(it) = z/|z|$. On appelle *racine carrée* de z tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = z$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle *puissance α de z* tout nombre complexe $\exp(\alpha w)$ où w est un logarithme de z.

Définition 5.2. Soit $X \subset \mathbb{C}^*$. Une *détermination continue du logarithme sur X* est une application continue

$$L : X \to \mathbb{C} \text{ telle que } \forall z \in X, \qquad \exp(L(z)) = z.$$

Une *détermination continue de l'argument sur X* est une application continue

$$A : X \to \mathbb{R} \text{ telle que } \forall z \in X, \qquad \exp(iA(z)) = z/|z|.$$

Une *détermination continue de la racine carrée sur X* est une application continue

$$R : X \to \mathbb{C} \text{ telle que } \forall z \in X, \qquad (R(z))^2 = z.$$

En particulier, une fonction L est une détermination continue du logarithme si et seulement si, pour tout $z \in X$, $L(z) = \ln|z| + iA(z)$ où A est une détermination continue de l'argument.

Théorème 5.3. *Il n'existe pas de déterminations continues de l'argument, du logarithme et de la racine carrée sur $\mathbb{C}^*$.*

Preuve. 1) Si A est une telle détermination de l'argument, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(it) = \exp(iA(\exp(it)))$, donc $t - A(\exp(it)) \in 2\pi\mathbb{Z}$. La fonction $a : t \in \mathbb{R} \mapsto (t - A(\exp(it)))/2\pi \in \mathbb{Z}$ serait continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc constante. Mais $-A(1)/2\pi = a(0) \neq a(2\pi) = (2\pi - A(1))/2\pi$. 2) S'il existe une détermination continue du logarithme L, alors A définie pour $z \in \mathbb{C}^*$ par $A(z) = -i(L(z) - \ln|z|)$ est une détermination continue de l'argument, ce qui est absurde. 3) S'il existe une détermination continue R de la racine carrée sur $\mathbb{C}^*$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $(R(z))^2 = z$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(R(\exp(it)))^2 = \exp(it)$, i.e.

$$S(t)^2 = 1 \quad \text{avec} \quad S(t) := \frac{R(\exp(it))}{\exp(it/2)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La fonction S est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\{-1,1\}$. Elle est donc constante et $S(\pi) = R(-1)/i = S(-\pi) = R(-1)/(-i)$, ce qui est absurde. $\square$

Définition 5.4. On appelle *détermination principale de l'argument*, notée Arg, la détermination continue de l'argument $\mathrm{Arg} : \mathbb{C}\backslash]-\infty,0] \to]-\pi,\pi[$ qui à z associe l'unique argument de z dans $]-\pi,\pi[$. On appelle *détermination principale du logarithme* l'application

$$\mathrm{Ln} : z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0] \mapsto \ln|z| + i \,\mathrm{Arg}\, z.$$

On appelle *détermination principale de la racine carrée* l'application

$$R : z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0] \mapsto \exp((\mathrm{Ln}\, z)/2).$$

Enfin, si $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle *détermination principale de la puissance* α l'application

$$P_\alpha : z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0] \mapsto \exp(\alpha\, \mathrm{Ln}\, z).$$

Théorème 5.5. *Les déterminations principales du logarithme, de la racine carrée, et de la puissance α sont holomorphes sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$. De plus,*

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0], \qquad (\mathrm{Ln}\, z)' = 1/z.$$

Preuve. L'application $\varphi : t \in]-\pi,\pi[\to \exp(it) \in \mathbb{T}\setminus\{-1\}$ est bijective, continue. Montrons que sa bijection réciproque ψ est aussi continue : il faut donc montrer que si w_n est une suite dans $\mathbb{T}\setminus\{-1\}$ qui converge vers $w \in \mathbb{T}\setminus\{-1\}$, alors la suite $(t_n)_n = (\psi(w_n))_n$ est une suite qui converge vers $t \in]-\pi,\pi[$ tel que $t = \psi(w)$.
Il suffit de montrer que, pour toute sous-suite convergente de (t_n) vers un $t \in [-\pi,\pi]$, on a $t \in]-\pi,\pi[$ et $\psi(w) = t$. Considérons donc une sous-suite convergente de (t_n) vers un $t \in [-\pi,\pi]$. Si $t = \pi$ ou $t = -\pi$, le fait que φ se prolonge par continuité aux bornes de l'intervalle $]-\pi,\pi[$ nous donne $w = -1$, ce qui est exclu. On a donc $t \in]-\pi,\pi[$, et la continuité de φ nous donne alors $t = \psi(w)$.
On définit alors Arg et Ln sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$ par

$$\mathrm{Arg}\,(z) = \psi(z/|z|), \qquad \mathrm{Ln}\,(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,(z).$$

On a alors sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$, $\exp\circ \mathrm{Ln} = \mathrm{Id}$. On en déduit que, quand $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$ et $w \in \mathbb{C}\setminus(]-\infty,0]\cup\{z\})$:

$$1 = \frac{(\exp\circ\mathrm{Ln}\,)(w) - (\exp\circ\mathrm{Ln}\,)(z)}{w-z} = \frac{(\exp\circ\mathrm{Ln}\,)(w) - (\exp\circ\mathrm{Ln}\,)(z)}{\mathrm{Ln}\,(w) - \mathrm{Ln}\,(z)}\frac{\mathrm{Ln}\,(w) - \mathrm{Ln}\,(z)}{w-z}.$$

Quand $w \to z$, on a

$$\frac{(\exp\circ\mathrm{Ln}\,)(w) - (\exp\circ\mathrm{Ln}\,)(z)}{\mathrm{Ln}\,(w) - \mathrm{Ln}\,(z)} \to \exp'(\mathrm{Ln}\,(z)) = \exp(\mathrm{Ln}\,(z)) = z,$$

ce qui découle de la dérivabilité de exp, de la continuité de Ln, et de l'injectivité de Ln qui découle de $\exp\circ\mathrm{Ln} = \mathrm{Id}$. En particulier

$$\lim_{w\to z} \frac{\mathrm{Ln}\, w - \mathrm{Ln}\, z}{w-z} = \frac{1}{z}. \qquad \square$$

Théorème 5.6. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$ sur lequel il existe une représentation continue L_0 du logarithme. Alors toute autre détermination continue L sur U est de la forme $L = L_0 + 2\pi ki$ où k est une constante dans $\mathbb{Z}$. De plus, L est holomorphe, et pour tout $z \in U$, $L'(z) = 1/z$. Réciproquement, si F est une primitive de $z \mapsto 1/z$ (c'est-à-dire si F est holomorphe et si $F'(z) = 1/z$), alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $F + c$ soit une détermination continue du logarithme.*

Preuve. Le premier point est clair. La preuve du second point est analogue à la preuve du théorème précédent. Pour le troisième, on remarque que si $F'(z) = 1/z$ et si $G(z) = z\exp(-F(z))$, alors

$$\forall z \in U, \qquad G'(z) = \exp(-F(z)) - zF'(z)\exp(-F(z)) = 0,$$

donc G est une constante non nulle $b = e^c$. $F + c$ est alors une détermination continue du logarithme sur Ω. $\square$

Corollaire 5.7. *Pour tout $\alpha \in [-\pi, \pi[$, on peut refaire la construction précédente d'une détermination continue du logarithme, d'un argument, etc., sur l'ensemble $\mathbb{C}$ privé de la demi-droite $(]-\infty, 0]e^{i\alpha})$, avec des résultats analogues. On peut donc construire des représentations continues de logarithme, d'argument, etc., sur n'importe quel ensemble de la forme $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite fermée issue de l'origine.*

Théorème 5.8. $$\forall z \in D(0,1), \qquad \mathrm{Ln}\,(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

Preuve. En effet, la série entière de droite est convergente sur $D(0,1)$ et définit une fonction $L : D(0,1) \to \mathbb{C}$ qui est holomorphe et telle que

$$\forall z \in D(0,1), \qquad L'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z} = \mathrm{Ln}\,'(1+z).$$

Le disque étant connexe, $z \mapsto L(1+z) - \mathrm{Ln}\,(1+z)$ est constante. Or elle est nulle à l'origine car $\mathrm{Ln}\,(1) = 0$. $\square$

Notation. Une fois que les fonctions $\exp z$ et Ln z ont été définies pour $z \in \mathbb{C}$, en général, on revient aux notations habituelles e^z et $\ln z$.

6 Intégrale de Cauchy et analyticité des fonctions holomorphes

Définition 6.1. Définition d'un chemin. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle *chemin dans U* toute application continue $\gamma : [a,b] \to U$, C^1 par morceaux, i.e. il existe une subdivision finie $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a,b]$ telle que, $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\gamma_{|]t_i, t_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction C^1 sur $[t_i, t_{i+1}]$.
On dit que γ est un *chemin fermé* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. On note $\gamma^* = \gamma([a,b])$ le *support* de γ.

Définition 6.2. Intégrale de Cauchy d'une fonction continue sur un chemin. Avec les notations précédentes, si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, on note

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Si δ est une autre paramétrisation du même chemin, c'est-à-dire si $\delta : [a', b'] \to U$ est telle qu'il existe une application strictement croissante $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ de classe C^1 et telle que φ^{-1} soit aussi de classe C^1, et $\delta = \gamma \circ \varphi$, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\delta f(z)dz.$$

L'intégrale d'une fonction continue sur un chemin dépend du support γ^* mais aussi du sens de parcours. En effet, si $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ est un chemin et si $\gamma^-(t) = \gamma(1 - t)$ est le même chemin parcouru dans l'autre sens, alors, si f est continue au voisinage de γ^*, on a

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

Enfin, sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \left(\sup_{\gamma^*} |f|\right) \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \left(\sup_{\gamma^*} |f|\right) L(\gamma)$$

où $L(\gamma)$ désigne la longueur du chemin γ.

Exemples. (a) Si $a \in U$ et $r > 0$ sont tels que $\overline{D}(a, r) \subset U$, le chemin

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto a + re^{it} \in U$$

est appelé *le cercle orienté positivement de centre* a *et de rayon* r. On le note $\partial D(a, r)$. On a

$$\int_{\partial D(a,r)} f(z)dz = i\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})re^{i\theta}d\theta \qquad \text{et} \qquad L(\partial D(a, r)) = \int_0^{2\pi} rd\theta = 2\pi r.$$

(b) Soient a, b deux points de U. On appelle *segment* $[a, b]$ le chemin

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto a(1 - t) + bt$$

Si $\gamma^* \subset U$, on dit que le segment $[a, b]$ est inclus dans U et on écrit $[a, b] \subset U$, et on a

$$\int_{[a,b]} f(z)dz = \int_0^1 f(a(1 - t) + bt)(b - a)dt \qquad \text{et} \qquad L([a, b]) = \int_0^1 |b - a|dt = |b - a|.$$

Le chemin opposé à $[a, b]$ est le chemin $[b, a]$, et on a $\int_{[a,b]} f(z)dz = -\int_{[b,a]} f(z)dz$.

(c) Soient a, b, c trois nombres complexes. Soit $\Delta = \Delta(a, b, c)$ le triangle de sommets a, b et c. On note $[a, b, c]$ le bord $\partial\Delta$ de ce triangle et on pose

$$\int_{[a,b,c]} f(z)dz = \int_{[a,b]} f(z)dz + \int_{[b,c]} f(z)dz + \int_{[c,a]} f(z)dz$$

pour toute fonction f continue sur la frontière de Δ, où on considére $\partial\Delta$ comme le chemin obtenu en joignant a à b, b à c et c à a par des segments. Si on effectue une permutation circulaire, sur (a, b, c), la relation précédente montre que le membre de gauche n'est pas affecté. Si (a, b, c) est remplacé par (a, c, b), le membre de gauche change alors de signe :

$$\int_{[a,c,b]} f(z)dz = \int_{[a,c]} f(z)dz + \int_{[c,b]} f(z)dz + \int_{[b,a]} f(z)dz = -\int_{[a,b,c]} f(z)dz.$$

Définition 6.3. Indice d'un chemin fermé par rapport à un point. Soit γ un chemin fermé. On définit, pour $z \notin \gamma^*$, l'indice de γ par rapport à z,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Le théorème suivant joue un rôle très important dans la théorie des fonctions holomorphes :

Théorème 6.4. *L'indice* $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ *est une fonction à valeurs entières sur* $U = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ *qui est constante sur chaque composante connexe de* U *et qui est nulle sur la composante connexe non bornée de* U*.*

Remarque : le support γ^* est compact, donc contenu dans un disque borné D dont le complémentaire $\mathbb{C} \setminus D$ est connexe. Par suite, $\mathbb{C} \setminus D$ est inclus dans l'une des composantes connexes de U. Ceci montre que U a exactement une seule composante connexe non bornée.

Preuve. Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Fixons $z \in U$. On a

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(s)\, ds}{\gamma(s) - z}$$

Il suffit de montrer que, si $t \in [a, b]$ et si on pose

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)\, ds}{\gamma(s) - z}\right),$$

alors $\varphi(b)$=1. La différentiation de cette égalité nous donne (excepté sur l'ensemble fini S où γ n'est pas dérivable)

$$\forall t \in [a, b], \qquad \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

En particulier, pour tout $t \in [a, b] \setminus S$,

$$\left(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z}\right)' = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0.$$

On en déduit que $\varphi/(\gamma - z)$ est une fonction continue sur $[a, b]$ de dérivée nulle hormis en un nombre fini de points, donc que $\varphi/(\gamma - z)$ est constante sur $[a, b]$. Donc $\varphi(b) = \varphi(a) = 1$, et $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ pour $z \in U$. Le théorème de continuité sous le signe somme dans le cas des intégrales sur les intervalles compacts montre que $z \in U \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est continue. En particulier, Ind_γ est constante sur chaque composante connexe de U. Enfin, le théorème de la convergence dominée montre que

$$\lim_{z\to\infty} \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0.$$

On en déduit que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est nul sur la composante connexe non bornée de U. □

Si on fixe un point z dans U, $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ correspond au "nombre de tours" fait par γ autour du point z, comptés positivement si le sens de parcours est direct, et négativement sinon.

Preuve. On suppose que $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est C^1 et que 0 n'appartient pas à γ^*. On interpréte géométriquement l'indice de γ par rapport à 0. On note Arg la détermination principale de l'argument dans $\mathbb{C}\setminus] - \infty, 0]$, et on suppose qu'il n'existe qu'un nombre fini de points $t_1 < \cdots < t_N$ dans $[a, b]$ tels que $\gamma(t_j) \in \mathbb{R}_-$, $j = 1, \ldots, N$. On a alors pour $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \ldots, t_N\}$,

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\mathrm{Arg}(\gamma)(t)} =: r(t)e^{i\varphi(t)}$$

où r et φ sont C^1 sur $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \ldots, t_n\}$. Sur cet ensemble, on a

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t).$$

donc

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \left(\int_a^{t_1} + \sum_{j=1}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} + \int_{t_N}^{b}\right)\left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t)\right) dt.$$

Par continuité de $\ln r$, les intégrales de r'/r disparaissent car $\ln r(a) = \ln r(b)$ (le chemin est fermé). Enfin

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_a^{t_1} + \sum_{j=1}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} + \int_{t_N}^{b}\right)(i\varphi'(t))\, dt$$

donne le nombre de fois où γ traverse la demi-droite $\mathbb{R}_-$, positivement dans le sens direct, c'est-à-dire de haut en bas, et négativement dans l'autre sens. □

Exercice 6.5. *Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Pour $z \notin \partial D(a, r)$, calculer directement $\mathrm{Ind}_{\partial D(a,r)}(z)$, le bord du disque étant parcouru dans le sens positif.*

Théorème 6.6. *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U telle que f' soit continue sur U. Si γ est un chemin joignant deux points $w = \gamma(a)$ et $z = \gamma(b)$ dans U, alors*

$$f(z) - f(w) = \int_\gamma f'(\zeta)d\zeta.$$

En particulier, si γ est un chemin fermé (c'est-à-dire $w = z$), on a

$$\int_\gamma f'(\zeta)d\zeta = 0.$$

Preuve. En effet, si $G(t) = f(\gamma(t))$, alors G est C^1 par morceaux, et pour tout $t \in [a,b] \setminus \{a, t_1, \dots, t_n\}$, $G'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Il en résulte que

$$f(z) - f(w) = G(a) - G(b) = \int_a^b G'(t)dt = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\gamma f'(\zeta)d\zeta. \qquad \square$$

Théorème 6.7. Théorème de Goursat. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et un triangle Δ de sommets a, b et c inclus dans U. Soit $p \in U$, $f \in H(U \setminus \{p\})$, continue en p. Alors*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{[a,b,c]} f(z)dz = 0.$$

Remarque. L'hypothèse qu'il peut exister un point $p \in U$ où f est continue mais pas holomorphe est une hypothèse technique qui sera utile dans la preuve du Théorème 6.11.

Preuve. Supposons d'abord que $p \notin \overline{\Delta}$. Notons L_0 le périmètre de ce triangle et D_0 son diamètre, c'est-à-dire

$$D_0 = \sup_{(z,w)\in\Delta} |z-w|.$$

Soient a', b', c' les milieux respectifs de $[b,c]$, $[a,c]$ et $[b,c]$. Considérons les quatre triangles $[a,c',b']$, $[b,a',c']$, $[c,b',a']$ $[a',b',c']$ et notons les Δ_j pour $j = 1,2,3,4$. On a

$$J := \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{[a,b,c]} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz.$$

La valeur absolue d'une des intégrales du dernier membre est donc au moins égale à $|J|/4$. Appelons Δ_1 le triangle correspondant. Le périmètre de ce triangle est $L_1 = L_0/2$ et son diamètre $D_1 = D_0/2$. Répétons la procédure avec Δ_1 au lieu de Δ, et ainsi de suite. On engendre ainsi une suite $(\Delta_n)_n$ de triangles emboîtés. Le périmètre de $\partial\Delta_n$ est $L_n = 2^{-n}L_0$ et le diamètre de Δ_n est $D_n = 2^{-n}D_0$. En outre

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 4^{-n}|J| \le \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right|.$$

D'après le théorème des compacts emboîtés, l'intersection des Δ_n est un singleton $\{z_0\}$. On a $z_0 \in \Delta$ et f est $\mathbb{C}-$dérivable en z_0 (car $p \notin \Delta$).
Si $\varepsilon > 0$, il existe un $r > 0$ tel que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \le \varepsilon|z - z_0|, \qquad |z - z_0| \le r.$$

De plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \ge N$, $|z - z_0| \le D_n \le r$ pour tout $z \in \Delta_n$. Comme 1 et z ont z et $z^2/2$ comme primitives dans $\mathbb{C}$, il découle du Théorème 6.6 que

$$\int_{\partial\Delta_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))dz = 0.$$

On a alors

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))dz,$$

donc

$$4^{-n}|J| \le \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| \le \varepsilon L_n D_n = \varepsilon 4^{-n} L_0 D_0$$

et donc, pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $n \geq N$, on ait $|J| \leq \varepsilon L_0 D_0$. On en déduit que $J = 0$ si $p \notin \overline{\Delta}$.
Supposons maintenant que p est un sommet de Δ, par exemple a. Si a, b, c sont alignés, il est clair que

$$\int_{[a,b,c]} f(z)dz = 0.$$

Sinon, choisissons des points $x \in [a, b]$ et $y \in [a, c]$ tous les deux voisins de a, et observons que l'intégrale de f sur $\partial\Delta$ est la somme des intégrales sur les frontières des triangles $\Delta(a, x, y)$, $\Delta(x, b, y)$ et $\Delta(b, c, y)$. Les deux dernières intégrales sont nulles d'après ce qui précède. Par suite, l'intégrale sur $\partial\Delta$ est la somme des intégrales sur $[a, x]$, $[x, y]$ et $[y, a]$, et comme ces intervalles peuvent être rendus arbitrairement petits et que f est bornée sur Δ, nous obtenons de nouveau que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Finalement, si p est un point arbitraire de $\overline{\Delta}$, on utilise le résultat précédent pour $\Delta(a, b, p)$, $\Delta(b, c, p)$, $\Delta(c, a, p)$, ce qui achève la démonstration. □

Définition 6.8. Ouvert étoilé. Soit $z_0 \in U$ un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que U est *étoilé par rapport à* z_0 si

$$\forall z \in U, \quad [z_0, z] = \{(1-t)z_0 + tz,\ t \in [0, 1]\} \subset U.$$

On dit que U est étoilé s'il existe un tel $z_0 \in U$.

Théorème 6.9. Existence de primitives des fonctions holomorphes dans un ouvert étoilé. *Soit U un ouvert étoilé, $p \in U$ et f une fonction holomorphe dans $U \setminus \{p\}$, continue en p. Alors f admet une primitive dans U.*

Preuve. Pour $z \in U$, posons $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw$. F est définie dans U tout entier.
Si $z \in U$, alors pour h suffisamment petit, le segment $[z, z+h]$ est dans U. L'ouvert U étant étoilé par rapport à z_0, pour tout $w \in [z, z+h]$ les segments $[z_0, w]$ sont dans U, ce qui implique que le triangle $\Delta(z_0, z, z+h)$ est dans U. D'après le théorème de Goursat, on a

$$\int_{[z_0,z,z+h]} f(w)dw = 0,$$

donc

$$F(z) + \int_{[z,z+h]} f(w)dw - F(z+h) = 0.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on en déduit

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]}(f(w) - f(z))dw\right| \leq \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon,$$

où l'inégalité est vraie dès que h est assez petit, par continuité de f. En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient que F est bien une primitive de f dans U. □

Remarque : L'existence d'une primitive s'étend au cas où U est un ouvert simplement connexe.

Théorème 6.10. Théorème de Cauchy dans un ouvert étoilé. *Soit U un ouvert étoilé, $p \in U$, $f \in H(U \setminus \{p\})$, continue en p. On a, pour tout chemin fermé γ dans U,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Preuve. En effet, f admet une primitive F, et par le Théorème 6.6,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma F'(z)dz = 0. \qquad \square$$

Théorème 6.11. Formule de Cauchy dans un ouvert étoilé. *Soit U un ouvert étoilé, et γ un chemin fermé dans U. Soit $f \in H(U)$ et $z \in U \setminus \gamma^*$, on a*

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Preuve. En effet, si z est fixé et si on pose

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \text{ si } \zeta \in U,\, \zeta \neq z \text{ et } g(\zeta) = f'(z) \text{ si } \zeta = z,$$

g est continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{z\}$. On en déduit que

$$\int_\gamma g(\zeta)d\zeta = 0,$$

ce qui donne la formule énoncée. $\square$

Remarque importante. Les théorèmes précédents admettent une version homotope :
Homotopie de chemins. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $I = [0,1]$, et deux chemins $\gamma_0 : I \to U$ et $\gamma_1 : I \to U$ ayant les mêmes extrémités. On dit qu'ils sont homotopes s'il existe une déformation continue de l'un dans l'autre, c'est à dire une application continue $\delta : (t,u) \in I \times I \to U$ telle que

$$\delta(t,0) = \gamma_0(t), \quad \delta(t,1) = \gamma_1(t), \quad \delta(0,u) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \quad \delta(1,u) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1).$$

De même, deux chemins fermés γ_0 et γ_1 sont homotopes s'il existe une déformation continue de l'un dans l'autre, c'est à dire une application continue $\delta : (t,u) \in I \times I \to U$ telle que

$$\delta(t,0) = \gamma_0(t), \quad \delta(t,1) = \gamma_1(t), \quad \delta(0,u) = \delta(1,u), \quad \forall u,$$

(c'est à dire que pour chaque u, $\delta(t,u)$ est un chemin fermé).

Théorème 6.12. (Cartan II.2.4 et 5) Théorème et Formule de Cauchy (version homotope). *Soit U un ouvert et $f \in H(U)$. On a, pour tout chemin fermé γ homotope à un point dans U,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

De plus, si $z \in U \setminus \gamma^*$, on a

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

On sait qu'une fonction analytique dans un ouvert est holomorphe dans cet ouvert (voir la remarque après le Corollaire 3.5). La formule de Cauchy donne la réciproque.

Théorème 6.13. *Soit γ un chemin dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ et soit g une fonction continue sur γ. Soit*

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Alors f est analytique dans $U \setminus \gamma$. De plus,

$$f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Preuve. Soit $z_0 \in U \setminus \gamma$ et $r = d(z_0, \gamma)$. Soit $0 < s < r$ tel que $D(z_0, s) \subset U$. Pour $z \in D(z_0, s)$, on a

$$\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{d\zeta}{1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)}$$
$$= \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta.$$

La série de fonctions $\zeta \mapsto \dfrac{g(\zeta)}{\zeta - z_0} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$ converge uniformément sur γ car

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < \frac{s}{r} < 1.$$

On en déduit que

$$\forall z \in D(z_0, s), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

où la série est convergente dans $D(z_0, s)$. Cela donne également la valeur de $f^{(n)}(z_0)$ par le Corollaire 3.5 appliqué autour de z_0. □

Corollaire 6.14. Toute fonction holomorphe est analytique. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. Alors f est analytique dans U. De plus, si $z_0 \in U$, alors f est développable en série entière dans le disque $D(z_0, r)$ où $r = d(z_0, \partial U)$, c'est à dire*

$$\forall z \in D(z_0, r), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \text{où } r' < r.$$

Preuve. Soit $z_0 \in U$. Il suffit d'appliquer le Théorème 6.13 à la représentation intégrale de la fonction f sur un cercle centré en z_0, orienté positivement, et inclu dans U. Comme le rayon du cercle peut être choisi comme un réel quelconque $< r$, on en déduit que le rayon de convergence de la série représentant f est au moins égal à r. La deuxième égalité provient de la deuxième formule obtenue dans le Théorème 6.13. $\square$

Corollaire 6.15. *Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $f \in H(U)$, alors $f' \in H(U)$.*

Preuve. La fonction f est analytique dans U et f' l'est aussi par le Théorème 3.4. Donc f' est holomorphe dans U toujours par le Théorème 3.4. $\square$

Remarque : Il peut arriver que la dérivée f' soit analytique dans un ouvert plus grand que celui de f, par exemple c'est le cas pour $f(z) = \ln(z)$. Le corollaire montre que l'inverse ne peut pas arriver.

Théorème 6.16. (Morera) *Soit f continue sur un ouvert U telle que*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0,$$

pour tout triangle Δ dans U. Alors $f \in H(U)$.

Preuve. Dans tout ouvert étoilé V de U (par exemple des boules), on peut construire une primitive (holomorphe) de f comme dans la preuve du Théorème 6.9 (remarquer que c'est l'hypothèse de nullité des intégrales sur les triangles qui est utilisée dans cette preuve). Par le Corollaire 6.15, $f \in H(V)$ pour tout ouvert étoilé V de U, donc $f \in H(U)$. $\square$

7 Propriétés des fonctions holomorphes

Proposition 7.1. Estimées de Cauchy. *Soit f analytique dans le disque ouvert $D(a, R)$ avec $|f(z)| \leq M$ dans $D(a, R)$. Alors*

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{M}{R^n}, \qquad n \geq 0.$$

Preuve. Pour tout $r < R$, la dernière égalité du Corollaire 6.14 montre que

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{M}{r^n}$$

d'où le résultat en faisant tendre r vers R. $\square$
Il en découle immédiatement

Théorème 7.2 (Théorème de Liouville). *Toute fonction entière bornée est constante.*

Proposition 7.3. Taylor avec majoration du reste. *Soit f analytique dans un voisinage du disque fermé $\overline{D}(a, R)$ avec $|f(z)| \leq M$ dans $\overline{D}(a, R)$. Soit $z \in D(a, r)$ avec $r < R$. Alors*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + R_N \quad \textit{avec} \quad |R_N| \leq \frac{MR}{R-r}\left(\frac{r}{R}\right)^N.$$

Preuve. On a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-a}\left(\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right)dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right](z-a)^n + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-z)}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^N dw$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + R_N, \qquad \text{avec } |R_N| \leq \frac{MR}{R-r}\left(\frac{r}{R}\right)^N.$$

□

Remarque : Contrairement au cas de la variable réelle, il n'est pas toujours possible d'écrire R_N sous la forme d'un reste de Taylor-Lagrange :

$$R_N = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}(z-a)^N,$$

pour un certain $\xi \in \mathbb{C}$. Par exemple, pour $N = 1$, on aurait $f(z) - f(a) = f'(\xi)(z-a)$, ce qui n'est pas possible avec $f(z) = e^{iz}$ et $z = a + 2\pi$.

Lemme 7.4. Lemme de Schwarz. *Soit $\Delta = D(0,1)$ et $f \in H(\Delta)$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall z \in \Delta$, $|f(z)| \leq 1$. Alors pour tout $z \in \Delta$, $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.*
De plus, s'il existe $z_0 \in \Delta \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors f est une rotation, autrement dit il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que

$$\forall z \in \Delta, \qquad f(z) = \lambda z.$$

Preuve. Voir les exos.

On donne deux théorèmes sur l'holomorphie d'une intégrale à paramètre. Le premier est un cas particulier du second.

Théorème 7.5. Holomorphie sous le signe somme dans le cas de l'intégration sur un intervalle compact. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et*

$$f(t,z) : [a,b] \times U \to \mathbb{C},$$

une fonction continue avec $z \mapsto f(t,z)$ holomorphe pour tout $t \in [a,b]$. Alors

$$F(z) = \int_a^b f(t,z)dt$$

est holomorphe sur U et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F^{(k)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(t,z)dt.$$

Preuve. Il découle du théorème de continuité sous le signe somme dans le cas de l'intégration sur un intervalle compact que F est continue. Soit $z \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, 2r) \subset U$. Pour $h \in \mathbb{C}^*$ tel que $|h| < r$, on a

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_a^b \frac{f(t,z+h) - f(t,z)}{h}dt.$$

Or, si on pose pour t fixé dans $[a,b]$, $g_t : u \in [0,1] \mapsto f(t, z+uh)$, alors g est C^1 sur $[0,1]$, et

$$f(t,z+h) - f(t,z) = g_t(1) - g_t(0) = \int_0^1 g_t'(u)du = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(t, z+hu)hdu,$$

ce qui prouve que

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_a^b \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(t, z+hu)du\, dt$$

La dernière égalité du Corollaire 6.14 avec $n=1$ entraine que

$$\forall t \in [a,b], \quad \forall u \in [0,1], \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(t, z+hu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,2r)} \frac{f(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - hu)^2}.$$

Donc, $\forall t \in [a,b]$, $\forall u \in [0,1]$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(t, z+hu) - \frac{\partial f}{\partial z}(t,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,2r)} \left(\frac{1}{(\zeta - z - hu)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right) f(t,\zeta)d\zeta$$

et si $M = \max_{[a,b]\times \overline{D}(z,2r)} |f|$, alors $\forall t \in [a,b],\ \forall u \in [0,1]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(t, z+hu) - \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\right| \leq M2r \max_{\zeta \in \partial D(z,2r)} \left| \frac{1}{(\zeta - z - hu)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right|.$$

Ceci prouve que

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)dt\right| \leq M2r(b-a)\int_0^1 \max_{\zeta \in \partial D(z,2r)} \left|\frac{(\zeta-z)^2 - (\zeta - z - hu)^2}{(\zeta - z - hu)^2(\zeta - z)^2}\right| du$$

$$\leq \frac{M(b-a)}{2r}\frac{|h||4r+h|}{(2r-|h|)^2}$$

qui tend vers 0 avec h. Finalement, la formule

$$f^{(n)}(t,z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

montre que $(t,z) \mapsto f^{(n)}(t,z)$ est continue et qu'on peut appliquer le théorème pour les dérivées d'ordre supérieur. □

Théorème 7.6. Holomorphie sous le signe somme pour l'intégrale de Lebesgue.
Soient (Ω, μ) un espace mesuré, et U un ouvert de $\mathbb{C}$.
Soit $f(t,z) : \Omega \times U \to \mathbb{C}$ telle que :
a) Pour tout $z \in U$, $t \mapsto f(t,z)$ est mesurable
b) Pour presque tout $t \in \Omega$, $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe
c) Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega,\mu)$ telle que

$$\forall (t,z) \in \Omega \times U, \quad |f(t,z)| \leq g(t).$$

Alors l'application $F(z) = \int_\Omega f(t,z)d\mu(t)$ est holomorphe dans U, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z) = \int_\Omega \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(t,z)d\mu(t).$$

Remarques. 1) La propriété c) sur chaque compact de U est en fait suffisante.
2) Le premier théorème se déduit du second. En effet, la propriété d'holomorphie est locale : pour un $z_0 \in U$ fixé, la fonction continue $f : [a,b] \times U \to \mathbb{C}$ vérifie les hypothèses du théorème précédent où l'on choisit pour U un disque $D(z_0, r)$ tel que $|f(t,z)|$ soit majorée par son sup sur le compact $[a,b] \times \overline{D}(z_0, r)$.
3) Contrairement au théorème de différentiation réelle d'une intégrale, l'hypothèse de domination porte sur la fonction et non la dérivée.

Preuve. Soit $z_0 \in U$ fixé. On prend une suite (h_n) de nombres complexes qui tend vers 0 telle que, pour tout n, $z_0 + h_n \in U$. On a

$$\frac{F(z_0 + h_n) - F(z_0)}{h_n} = \int_\Omega \frac{f(t, z_0 + h_n) - f(t, z_0)}{h_n} d\mu(t) = \int_\Omega g_n(t) d\mu(t),$$

avec

$$g_n(t) := \frac{f(t, z_0 + h_n) - f(t, z_0)}{h_n} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(t, z_0 + uh_n) du.$$

Soit $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, 2r) \subset U$. Il existe un rang N à partir duquel $z_0 + h_n \in D(z_0, r)$. Le Corollaire 6.14 donne, pour $u \in [0,1]$ et $n \geq N$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(t, z_0 + uh_n)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, 2r)} \frac{f(t,\zeta)}{(\zeta - (z_0 + uh_n))^2} d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{g(t) 2\pi (2r)}{r^2} = \frac{2g(t)}{r}.$$

Le théorème de convergence dominée donne la convergence de $g_n(t)$ vers $\partial f / \partial z(t, z_0)$ (et donc aussi que $t \mapsto \partial f / \partial z(t, z_0)$ est mesurable). De plus, on a la majoration $|g_n(t)| \leq 2g(t)/r$. Une nouvelle application du théorème de convergence dominée donne le résultat pour $n = 1$. On peut ensuite recommencer avec F' à la place de F et $\partial f / \partial z$ à la place de f en remarquant que $|\partial f / \partial z(t, z)| \leq 2g(t)/r$ sur $\Omega \times D(z_0, r)$. $\square$

Théorème 7.7. (Weierstrass) *Soit U un ouvert et $(f_n)_n$ une suite de $H(U)$ qui converge uniformément vers une fonction f sur tout compact de U. Alors $f \in H(U)$ et $(f_n')_n$ converge uniformément vers f' sur tout compact de U.*

Preuve. Pour montrer que $f \in H(U)$, on utilise Morera. Soit Δ un triangle dans U. Alors, par convergence uniforme, f est continue sur U, et, sur le compact Δ,

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \lim_{n\infty} \int_{\partial \Delta} f_n(z) dz = 0,$$

d'où $f \in H(U)$. Soit K un compact de U et $r < d(K, \partial U)$. Alors $K_r = \{z \in \mathbb{C},\ d(z, K) \leq r\}$ est un compact inclus dans U qui contient tous les disques $\overline{D}(z, r) \subset U$ quand $z \in K$. Par les estimées de Cauchy, on a, pour $z \in K$,

$$|f'(z) - f_n'(z)| \leq r^{-1} \|f - f_n\|_{K_r},$$

donc (f_n') converge vers f', uniformément sur tout compact de U. $\square$

Corollaire 7.8. *Sous les mêmes hypothèses, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$.*

Remarque 7.9. Le résultat précédent est différent de la situation sur l'axe réel. En effet, une suite de fonctions indéfiniment dérivables (des polynômes par exemple) peut converger uniformément vers une fonction nulle part dérivable !

8 Singularités isolées des fonctions holomorphes

Définition 8.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in H(U \setminus \{a\})$. Si f ne peut pas être définie en a de sorte que la fonction prolongée soit holomorphe, on dit que f a une *singularité isolée (non artificielle) au point a.*

Théorème 8.2. (Riemann) *Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et si $f \in H(U \setminus \{a\})$ est bornée au voisinage de a, alors f se prolonge à U (i.e. a n'est pas une singularité de f).*

Preuve. En effet, posons $h(a) = 0$ et $h(z) = (z-a)^2 f(z)$ pour $z \in U \setminus \{a\}$.
Soit $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset U$ et $|f(z)| \leq M$ dans $D(a,r) \setminus \{a\}$. On a, pour $0 < |z-a| < r$,

$$\left| \frac{h(z) - h(a)}{z-a} \right| \leq M|z-a|,$$

ce qui montre que h est holomorphe dans U et que $h'(a) = 0$.
On a donc l'existence d'une suite (c_n) avec $c_0 = c_1 = 0$ telle que

$$\forall z \in D(a,r), \qquad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

On obtient l'extension holomorphe de f en posant $f(a) = c_2$ car alors

$$\forall z \in D(a,r), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n. \qquad \square$$

Théorème 8.3. (Casorati-Weierstrass) *Soit $f \in H(U \setminus \{a\})$, l'un des trois cas suivants se produit :*
(a) f a une singularité artificielle en a.
(b) f a un pôle d'ordre m en a : il existe $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, avec $c_m \neq 0$ tels que

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

ait une singularité artificielle en a.
(c) f a une singularité essentielle en a : pour tout $D(a,r) \subset U$, l'image $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ est dense dans le plan complexe.

Dans le cas (b), la fonction

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

qui est un polynôme en $1/(z-a)$ est appelée la *partie principale* de f en a. Il est clair que dans cette situation $|f(z)| \to +\infty$ quand $z \to a$.

Preuve. Supposons que (c) soit faux. Il existe alors $w \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\delta > 0$ tels que $|f(z) - w| > \delta$ dans $D(a,r) \setminus \{a\}$. Soit $D = D(a,r)$, $D' = D(a,r) \setminus \{a\}$, et

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}, \qquad z \in D'.$$

Alors $g \in H(D')$ et $|g| \leq 1/\delta$ donc g se prolonge en une fonction holomorphe dans D. Si $g(a) \neq 0$, la définition de g montre que f est bornée dans D' donc (a) est vraie. Sinon g a un zéro d'ordre $m \geq 1$ en a, et

$$g(z) = (z-a)^m g_1(z), \qquad z \in D,$$

avec $g_1 \in H(D)$ et $g_1(a) \neq 0$. De plus g_1 n'a pas de zéro dans D' d'après la définition de g. On en déduit que

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{g_1(z)} + w$$

où $1/g_1$ est holomorphe dans un voisinage de a. On est alors dans le cas (b). □

Remarque 8.4. La fonction f a un pôle en a si et seulement si $f(z) \to \infty$ quand $z \to a$.

En effet, si $f(z) \to \infty$ quand $z \to a$, alors $g(z) = 1/f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de a et $g(a) = 0$. L'ordre du zéro de g en a correspond à l'ordre du pole de f en a.

Remarque 8.5. *Exemple d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ayant une singularité essentielle en* 0 *:*

$$f(z) = \exp(1/z).$$

La fonction log *a une singularité en 0 qui ne rentre pas dans le cadre de ce qui précéde puisqu'elle ne peut pas être définie dans un voisinage épointé de 0. En fait, 0 est ce qu'on appelle un point de branchement de la fonction* log.

On énonce sans preuve le théorème de Picard (versions faible et forte).

Théorème 8.6. (Picard) *Soit f une fonction entière non constante. Alors $f(\mathbb{C})$ égale $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}$ privé d'un point. De plus, si f n'est pas un polynôme, chaque valeur de $f(\mathbb{C})$ est atteinte une infinité de fois (Picard fort).*

Remarque : Le théorème précédent reste valable si on considère une fonction f admettant une singularité essentielle en un point a et si on remplace $f(\mathbb{C})$ par $f(D(a,r) \setminus \{a\})$, $r > 0$.

Théorème 8.7. Séries de Laurent. *Soit f une fonction analytique dans une couronne $S = \{z,\ 0 \leq r_1 < |z-a| < r_2\}$ ($r_1 = 0$ est possible). Alors, pour $z \in S$, on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n \quad \textit{avec} \quad c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|t-a|=r} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt, \tag{8.1}$$

et $r_1 < r < r_2$. La première série est normalement convergente sur les compacts de $|z-a| < r_2$ et la seconde l'est sur les compacts de $r_1 < |z-a|$. On appelle ce développement la série de Laurent de f en a.

Preuve. Soit $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. Par la formule de Cauchy, on a, pour $\rho_1 < |z-a| < \rho_2$,

$$2i\pi f(z) = \int_{|t-a|=\rho_2} \frac{f(t)}{t-z} dt - \int_{|t-a|=\rho_1} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

En utilisant les développements

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n, \quad |t-a| = \rho_2, \qquad \frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t-a}{z-a}\right)^n, \quad |t-a| = \rho_1,$$

qui sont normalement convergents, respectivement sur $|t-a| = \rho_2$ et $|t-a| = \rho_1$, et en permutant intégrales et sommes, on obtient la formule du théorème. La convergence normale des deux séries dans les domaines donnés se voit facilement par majoration des termes. □

Définition 8.8. Définition du résidu. Soit U un ouvert, $a \in U$, et $f \in H(U \setminus \{a\})$, admettant le développement (8.1). Le nombre c_{-1} est appelé le *Résidu* de f en a et noté $\mathrm{Res}\,(f,a)$.

Si a est un pôle d'ordre m d'une fonction f, on vérifie que

$$\mathrm{Res}\,(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\left.\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\right|_{z=a}(z-a)^m f(z).$$

Théorème 8.9. Théorème des résidus. *Soit U un ouvert étoilé, et f holomorphe sur $U' = U \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Soit γ un chemin fermé dans U'. On a*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f,a_k)\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(a_k).$$

Preuve. La fonction f admet un développement de Laurent au voisinage de chaque point a_k. Soit Q_k la partie singulière du développement en a_k. Comme $f-(Q_1+\cdots+Q_n)$ n'a que des singularités artificielles dans U ($f-Q_k$ et $\sum_{j\neq k} Q_j$ sont régulieres en a_k), le théorème de Cauchy montre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (f(z) - Q_1(z) - \cdots - Q_n(z))dz = 0.$$

Or pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma Q_k(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n,k}}{(z-a_k)^n}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma \frac{c_{-n,k}}{(z-a_k)^n}dz = c_{-1,k}\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(a_k),$$

où la 2ieme égalité est justifiée par la convergence normale de la série. □

Remarque : comme pour le théorème de Cauchy, il existe une version homotope du théorème des résidus (même énoncé avec U ouvert quelconque et γ homotope à un point dans U).

Corollaire 8.10. *Soit $\overline{D}(a,r)$ un disque fermé inclus dans un ouvert U et $f \in H(U)$ qui ne s'annule pas sur $\partial D(a,r)$. Alors le nombre de zéros de f, comptés avec leur multiplicité, dans le disque $D(a,r)$ est égal à $\mathrm{Ind}_{f(\partial D(a,r))}(0)$, le bord du disque étant parcouru dans le sens positif.*

Preuve. En effet, si $a_1, \ldots, a_n$ sont les zéros de f dans $D(a,r)$, comptés avec les multiplicités m_k, alors au voisinage de a_k, $f(z) = (z-a_k)^{m_k} f_k(z)$ où f_k ne s'annule pas au voisinage de a_k, donc au voisinage de a_k,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_k}{z-a_k} + \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}.$$

Ceci implique que $\mathrm{Res}\,(f'/f, a_k) = m_k$, donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

c'est-à-dire que la dernière intégrale est égale au nombre de zéros recherché. Or

$$\mathrm{Ind}_{f(\partial D(a,r)))}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f(\partial D(a,r))} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(a+re^{it})re^{it}dt}{f(a+re^{it})} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

□

Définition 8.11. Fonctions méromorphes. Une fonction f définie sur un ouvert U est dite *méromorphe* sur U s'il existe un ensemble S de points isolés dans U tel que $f \in H(U \setminus S)$ et tel que les éléments de S soient des pôles de f. On note $\mathcal{M}(U)$ le corps des fonctions méromorphes sur U.

On peut montrer (théorème de Mittag-Leffler, Rudin, p. 353) que tout fonction méromorphe sur U est en fait globalement le quotient de deux fonctions holomorphes sur U.

9 Applications de la formule des Résidus

Théorème 9.1. Dénombrement des zéros et des pôles. *Soit U un ouvert, $\overline{D}(a,r)$ un disque fermé inclus dans U et $f \in \mathcal{M}(U)$ sans zéro, ni pôle sur le bord C du disque $D(a,r)$. Alors la différence des nombres de zéros et de pôles de f dans le disque $D(a,r)$ est égale à $\mathrm{Ind}_{f(C)}(0)$, le bord du disque étant parcouru dans le sens positif.*

Preuve. Analogue à la preuve du Corollaire 8.10.

Théorème 9.2. (de l'application ouverte) *Soit G un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in H(G)$ non constante. Alors f est ouverte, c'est-à-dire que l'image par f de tout ouvert U de G est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Preuve. Soit U un ouvert de G et $w_0 = f(z_0) \in f(U)$ avec $z_0 \in U$. On veut montrer qu'il existe un voisinage V de w_0 tel que $V \subset f(U)$, c'est-à-dire que pour tout $w \in V$, la fonction $z \mapsto f(z) - w$ admette (au moins) un zéro dans U. Il existe un disque $D = D(z_0, r)$ tel que $\overline{D}(z_0,r) \setminus \{z_0\} \subset U$ soit sans zéro de $f(z) - w_0$ (sinon, z_0 serait un zéro non isolé et $f(z)$ serait constante dans le connexe G). On peut donc appliquer le Théorème 9.1 d'où

$$m = N(w_0) \quad \text{avec} \quad N(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)-w} dz,$$

et m la multiplicité (finie) du zéro z_0 de $f(z)-w_0$. La fonction continue $|f(z)-w_0|$ atteint son minimum $\epsilon > 0$ sur le compact ∂D. Soit w tel que $|w-w_0| < \epsilon$. Alors

$$|f(z)-w| \geq |f(z)-w_0| - |w-w_0| > 0,$$

et donc la fonction $N(w)$ est bien définie dans $D(w_0,\epsilon)$. Comme $N(w)$ est une fonction continue qui ne prend que des valeurs entières, elle est constante sur le connexe $D(w_0,\epsilon)$. On en déduit que, pour tout $w \in D(w_0,\epsilon)$, la fonction $f(z)-w$ admet m zéros dans $D(z_0,r)$. On peut donc choisir $D(w_0,\epsilon)$ pour le voisinage V cherché. $\square$

Intégrales sur $\mathbb{R}$ de fractions rationnelles. *Soit à calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

où P et Q sont deux polynômes, Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $d^o(Q) \geq d^o(P)+2$.
On pose $f(z) = P(z)/Q(z)$ que l'on intègre sur le contour γ_R formé du segment $[-R,R]$ et du demi-cercle de rayon R joignant R à $-R$ dans le sens direct dans le demi-plan supérieur, et on fait tendre R vers $+\infty$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2i\pi \sum \mathrm{Res}\,(f, \mathrm{Im}\, z > 0).$$

Intégrales sur $\mathbb{R}$ du produit d'une fraction rationnelle par une exponentielle complexe. *Soit à calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{itx} dx$$

où P et Q sont deux polynômes, Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $d^o(Q) \geq d^o(P)+1$.
On pose $f(z) = P(z)/Q(z)e^{itz}$, et si $t > 0$, on intègre sur le contour γ_R formé du segment $[-R,R]$ et du demi-cercle de rayon R joignant R à $-R$ dans le sens direct dans le demi-plan supérieur, et on fait tendre R vers $+\infty$. Si $t < 0$, on prend le symétrique par rapport à l'axe des x du contour précédent. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{itx} dx = 2i\pi \sum \mathrm{Res}\,(f, 1/2 \text{ plan choisi}).$$

Intégrales sur $\mathbb{R}^+$ du produit d'une fraction rationnelle par une puissance. *Soit à calculer*

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{s-1} dx$$

où P et Q sont deux polynômes, $s \in]0,1[$, Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $d^o(Q) \geq d^o(P)+1$. On pose $f(z) = (P(z)/Q(z))e^{(s-1)\mathrm{Ln}\, z}$, où Ln est la représentation du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. On intègre sur le contour $\gamma_{R,\varepsilon,\alpha}$ formé du segment $[\varepsilon e^{i\alpha}, Re^{i\alpha}]$, de l'arc de cercle de centre 0 et de rayon R joignant les points $Re^{i\alpha}$ et $Re^{-i\alpha}$ dans le sens direct, du segment $[Re^{-i\alpha}, \varepsilon e^{-i\alpha}]$ et de l'arc de cercle de centre 0 et de rayon ε joignant les points $\varepsilon e^{-i\alpha}$ à $\varepsilon e^{i\alpha}$ dans le sens indirect, puis on fait tendre ε et α vers 0 et R vers $+\infty$. On a

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{s-1} dx = -2i\pi \frac{\pi e^{-i\pi s}}{\sin \pi s} \sum \mathrm{Res}\,(f, \mathbb{C}).$$

10 Annexe sur les produits infinis

Définition 10.1. Soient $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On dit que le produit infini $\prod a_k$ est **convergent** dans les deux cas suivants :
1) Un des a_k est nul et alors $\prod a_k = 0$ (cas trivial),
2) Les a_k sont non nuls et il existe $P \in \mathbb{C}$ **non nul** tel que

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \to P \neq 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Si P_n n'a pas de limite ou tend vers 0 lorsque les a_k sont non nuls, on dit que $\prod a_k$ diverge.

Exemple : $\prod \frac{k}{k+1}$ *diverge vers 0.*

Avec cette définition, la principale propriété d'un produit fini est conservée, à savoir un produit convergent est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Lorsque les a_k sont non nuls, une **condition nécessaire** *de convergence est que $a_k \to 1$. En effet,*

$$a_k = \frac{P_k}{P_{k-1}} \to \frac{P}{P} = 1.$$

L'exemple précédent ou aussi $\prod \frac{k+1}{k}$ *montre que la condition n'est pas suffisante.*

Si on suppose que $a_k \to 1$ alors, pour $k \geq K$ assez grand, $\log(a_k)$ *est bien défini et on a*

$$\prod_{k\geq K} a_k \ \textit{converge} \iff \sum_{k\geq K} \log(a_k) \ \textit{converge},$$

ce qui ramène donc l'étude d'un produit infini à celui d'une série. Remarquer que l'assertion de gauche inclut l'hypothèse $P \neq 0$ (et qu'elle est bien utilisée pour l'équivalence).

Soit $a_k = 1 + b_k \to 1$. On dit que $\prod a_k$ est **absolument convergent** *si*

$$\prod (1 + |b_k|) \ \textit{converge} \iff \sum |b_k| \ \textit{converge}.$$

De plus,

$$\sum |b_k| \ \textit{conv.} \iff \sum |\log(1+b_k)| \ \textit{conv.} \implies \sum \log(1+b_k) \ \textit{conv.} \implies \prod a_k \ \textit{conv.}$$

autrement dit, comme pour les séries, un produit absolument convergent est convergent.

10.1 Produit infini de fonctions

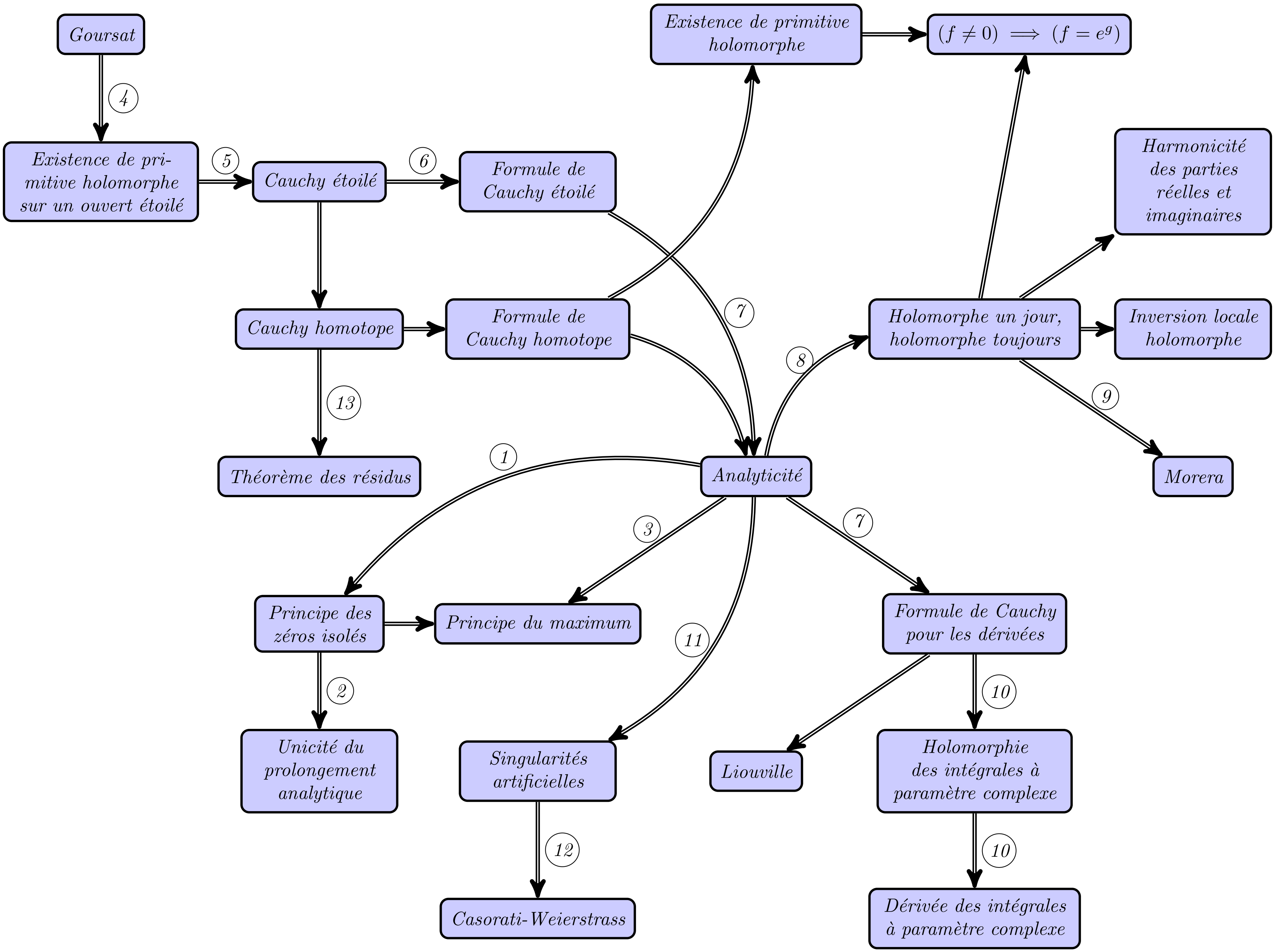
Théorème 10.2. *Soit $g_k(z) = 1 + h_k(z)$, $k \geq 1$, une suite de fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{C}$. On suppose que $\sum h_k$ converge normalement sur E (i.e. $\sum \sup_E |h_k|$ converge). Alors le produit $\prod g_k$ est uniformément convergent sur E (ce qui entraine en particulier que $\prod g_k(z_0)$ est nul pour un $z_0 \in E$ si et seulement si l'un des $g_k(z_0)$ est nul).*

Démonstration. La fonction $\log(1+z)/z$ est analytique dans $D(0,1)$ donc il existe $C > 0$ tel que $|\log(1+z)| \leq C|z|$ pour $|z| \leq 1/2$. Pour k assez grand, $|h_k(z)| \leq 1/2$, $z \in E$, donc

$$|\log(1 + h_k(z))| \leq C|h_k(z)|,$$

ce qui montre que $\sum_k \log(1 + h_k(z))$ converge uniformément sur E, et en prenant l'exponentielle, on obtient la convergence uniforme de $\prod_k g_k(z)$. □

Le schéma qui suit est repris d'un cours de A. Moussa à l'ENS Cachan (2010).


Goursat
Existence de primitive holomorphe sur un ouvert étoilé
Cauchy étoilé
Formule de Cauchy étoilé
Existence de primitive holomorphe
$(f \neq 0) \implies (f = e^g)$
Harmonicité des parties réelles et imaginaires
Cauchy homotope
Formule de Cauchy homotope
Holomorphe un jour, holomorphe toujours
Inversion locale holomorphe
Théorème des résidus
Analyticité
Morera
Principe des zéros isolés
Principe du maximum
Formule de Cauchy pour les dérivées
Unicité du prolongement analytique
Singularités artificielles
Liouville
Holomorphie des intégrales à paramètre complexe
Casorati-Weierstrass
Dérivée des intégrales à paramètre complexe
1
2
3
4
5
6
7
7
8
9
10
10
11
12
13

1 : Proposition 2.3, 2 : Corollaire 2.4, 3 : Corollaire 2.6, 4 : Théorème 6.9,
5 : Théorème 6.10 6 : Théorème 6.11 7 : Corollaire 6.14 8 : Corollaire 6.15
9 : Théorème 6.16 10 : Théorème 7.6 11 : Théorème 8.2 12 : Théorème 8.3
13 : Théorème 8.9