Exercices d'Analyse Complexe

1 Séries entières et Fonctions Analytiques

Exercice 1.1. **1.** Calculer le rayon de convergence des séries entières

$$\sum_n \frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_n n^\alpha z^n \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \sum_n n! z^n.$$

2. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert ou celle de Cauchy à la série entière $\sum_n z^{2^n}$?
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_n z^{2^n}$?

Exercice 1.2. Donner les 4 premiers termes du développement de

$$f(z) = z^2/(z+2)$$

au voisinage du point $z_0 = 1$.

Exercice 1.3. Donner le développement en série entières des fonctions suivantes, et donner le rayon de convergence de la série obtenue :

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3} \quad \text{en } 0, \quad g(z) = \frac{1}{3 - 2z} \quad \text{en } 3, \quad h(z) = e^z \quad \text{en } 1.$$

Exercice 1.4. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries de rayons de convergence r et s. Que peut-on dire des rayons de convergence des séries :

$$\sum (a_n + b_n) z^n, \qquad \sum a_n b_n z^n.$$

Exercice 1.5. **1)** Quels sont les rayons de convergence des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

2) Montrer que la 1ere diverge en tout point du cercle $|z| = 1$, la seconde converge en tout point du cercle $|z| = 1$, la 3ieme converge en tout point du cercle $|z| = 1$ sauf $z = 1$.

Exercice 1.6. Pour quelles valeurs de z les séries suivantes convergent-elles ?

$$\sum_0^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n, \qquad \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^{2n}}.$$

Exercice 1.7. Montrez que si la règle de d'Alembert s'applique pour une série entière, alors celle de Cauchy s'applique aussi. Montrez que la réciproque est fausse.

Exercice 1.8. 1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0. Existe-t-il f analytique dans U telle que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ assez grand.}$$

2. Même question avec

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\ln n}, \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ assez grand.}$$

3. Montrer qu'il existe une fonction entiere f telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(n) = \cos\sqrt{n}.$$

Exercice 1.9. ([Go], p. 246). Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence ≥ 1. On suppose $b_n > 0$ pour tout n et que la série $\sum b_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

a) S'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \ell,$$

montrer que

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{\sum_{n=0}^\infty a_n x^n}{\sum_{n=0}^\infty b_n x^n} = \ell.$$

b) Si on suppose simplement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_0 + \cdots + A_{n-1}}{n} = \ell \qquad \text{avec} \qquad \ell \in \mathbb{C},$$

montrer que

$$\lim_{x\to 1_-} \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \ell.$$

c) Application. Lorsque $x \to 1$ par valeurs inférieures, montrer les équivalents

$$\sum_{n=0}^\infty x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}, \qquad \sum_{n=0}^\infty x^{a^n} \sim -\frac{\log(1-x)}{\log a},\ (a \in \mathbb{N},\ a \geq 2),$$

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{4n+1} \sim \frac{1}{2}.$$

Exercice 1.10. Théorème de Bernstein. ([Go]) [(D: 18, 41, 43)]. Soient $a > 0$ et $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in]-a,a[, \qquad f^{(2k)}(x) \geq 0.$$

On se propose de montrer que f est développable en série entière sur $]-a,a[$.

On pose

$$F(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

1. Montrer que pour $x \in]0,a[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + R_n(x)$$

où $R_n \geq 0$. Montrer la convergence de

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{F^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}.$$

2. Montrer, avec la formule du reste intégral, que, pour $0 < x < y < a$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq R_n(x) \leq R_n(y) \left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1}.$$

Indication. On pourra utiliser que, pour tout $t \in [0, x]$, $(x-t)/(y-t) \leq x/y$. On rappelle la formule du reste intégral pour $f \in C^{n+1}$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b (b-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt.$$

En déduire que $R_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$ et que F est développable en série entière sur $]-a, a[$.
3. On revient à la fonction f. Posons pour $x \in]-a, a[$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Montrez que $f(x) = S_{2n+1}(x) + r_n(x)$ avec $|r_n(x)| \leq 2R_n(|x|)$. Montrez que

$$S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

4. En déduire le théorème de Bernstein.

Exercice 1.11. Solutions d'équations fonctionnelles ([Po], p. 228, [D: 1, 41, 43]) Soit $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 - qx) f(qx).$$

1. Montrer que si deux telles fonctions f et g concident en 0, elles concident sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une série entière vérifiant l'équation fonctionnelle.
3. En déduire que toute solution f se développe en série entière de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 1.12. Equation de Bessel. ([Po], p.229) On considère l'équation différentielle dite "équation de Bessel " :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

avec $\nu > 0$ et $\nu \notin \mathbb{N}/2$. Chercher toutes les solutions de la forme $y(x) = x^\lambda S(x)$, $x > 0$, où S est une série entière, avec $S(0) = 1$, dont on déterminera le rayon de convergence.

Exercice 1.13. Nombres de Stirling. ([Po], p. 230-231, [D: 21, 41, 43, 47] et en algèbre : 45). Pour $n \in \mathbb{N}$; on note le nombre de Stirling

$$p_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

1. Montrez que p_n est bien défini.
2. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(e^x - 1)$. Montrer que f est développable en série entière $\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$ où $d_k = p_k/k!$ et que f vérifie l'équation différentielle $y' = e^x y$.
3. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k p_k$.
4. On note q_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire un sous ensemble de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ dont E est la réunion disjointe. Soit $E = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ un ensemble à $n+1$ éléments, et pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, r_k désigne le nombre de partitions de E telles que a_{n+1} appartienne à un ensemble A_k de la partition et possédant $k+1$

éléments. Calculez r_{n+1}. Montrez que $q_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} r_k$.
5. Montrez que $r_k = C_n^k q_{n-k}$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k q_k$.
7. En déduire que $p_n = q_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
8. Calculer q_1, q_2, q_3.

Voir aussi l'exercice sur les suites récurrentes linéaires et dénombrements p.232 dans [Po]. Voir aussi, dans [Go], le théorème d'Abel p.252, le théorème Taubérien faible p.253, le théorème Taubérien fort p.289, les nombres et polynômes de Bernoulli p.299.

2 Fonctions holomorphes

Exercice 2.1. Soit $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ une application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
1. Montrer que
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{\partial P}{\partial z} = 2i\frac{\partial Q}{\partial z}$$
et que
$$\text{grad}(P) = \overline{f'(z)}, \quad \text{grad}(Q) = i\overline{f'(z)}.$$
2. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $f = P + iQ$ holomorphe. Soit $F = f \circ \gamma$. Vérifier que pour $F'(t) = ((P \circ \gamma)'(t), (Q \circ \gamma)'(t))$, on a
$$F'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Exercice 2.2. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. Montrez que sur U :
$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \qquad \text{et} \qquad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

Exercice 2.3. 1. Comment s'écrivent les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires ?
2. Soit $z = x + iy$. Justifier que $\mathbb{C}[z, \overline{z}] = \mathbb{C}[x, y]$. Quels sont les polynômes en x et y qui sont holomorphes ?

Exercice 2.4. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $V = \{\overline{z},\ z \in U\}$. Soit $f \in H(U)$ et g définie sur V par $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Montrez que $g \in H(V)$.

Exercice 2.5. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. Montrez l'équivalence des propriétés suivantes :
a) f est constante, b) Re f est constante, c) Im f est constante
d) $z \mapsto \overline{f(z)}$ est holomorphe
e) $|f|$ est constante
f) L'image de f est contenue dans une droite affine de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.6. On note $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 0\}$. On pose
$$f(z) = \ln|z| + i \arctan\frac{y}{x}, \qquad z = x + iy \in \mathbb{H}.$$
Montrer que f est holomorphe dans $\mathbb{H}$.

Exercice 2.7. Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soient $f, g, f_1, \dots, f_n$ holomorphes dans U (alors les dérivées $f', g', f'_1, \dots, f'_n$ sont aussi holomorphes).

1. Montrer que $\overline{\partial}\partial(f\overline{g}) = f'\overline{g'}$.

2. On suppose que $|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$ est constante sur U. Que peut-on dire des f_k ?

Exercice 2.8. Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Determiner les applications holomorphes $f = u + iv$ telles que $v = u^2$ dans U.

Exercice 2.9. (Homographies) 1) Montrer que toute droite du plan peut s'écrire sous la forme $Az + \overline{A}\overline{z} + B = 0$.
2) Montrer que tout cercle peut s'écrire sous la forme $z\overline{z} + Az + \overline{A}\overline{z} + C = 0$.
3) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $ad - bc \neq 0$. Montrer que l'homographie

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

est une bijection de $\overline{\mathbb{C}}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$.
4) Montrer que toute homographie peut s'écrire comme la composée de translation, de rotation, d'homothetie (multiplication par un scalaire positif), et d'une inversion.
5) En déduire qu'une homographie transforme une droite ou cercle en droite ou cercle.
6) Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. On dit que $f : U \to V$ est un biholomorphisme de U dans V si et seulement si f est une application holomorphe sur U, bijective de U dans V et telle que la bijection réciproque $f^{-1} : V \to U$ soit holomorphe sur V. On note $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Montrez qu'il existe un biholomorphisme de $D(0,1)$ dans $\mathbb{H}$.

Exercice 2.10. Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $f : z \in U \to V$ et $g : z \in V \to \mathbb{C}$ deux applications différentiables. Montrez que

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(z) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z))\frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f(z))\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z)$$

et

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f(z))\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z).$$

En déduire que si f et g sont holomorphes, alors $g \circ f$ est holomorphe et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'.$$

Exercice 2.11. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $\varphi : U \times V \to \mathbb{C}$ une application différentiable. On suppose que pour tout $u \in U$, l'application $v \in V \mapsto \varphi(u, v)$ est holomorphe et que pour tout $v \in V$, l'application $u \in U \mapsto \varphi(u, v)$ est holomorphe. On suppose maintenant que pour tout $z \in U$, $\overline{z} \in V$ et on pose, pour $z \in U$, $f(z) = \varphi(z, \overline{z})$. Montrer que f est différentiable sur U et que pour tout $z \in U$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(z, \overline{z}), \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(z, \overline{z}).$$

Application : calculer $\partial f/\partial z(z)$ et $\partial f/\partial \overline{z}(z)$ pour :

$$f(z) = z,\ f(z) = \overline{z},\ f(z) = z^\alpha \overline{z}^\beta,$$

$$f(z) = |z|^2,\ f(z) = e^{|z|^2},\ f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2 + 1}.$$

3 Logarithmes, Fonction exponentielle, Puissances

Exercice 3.1. Vrai ou Faux ?

$$\exp(\log z)) = z, \quad \log(\exp z)) = z, \quad \log(z^2) = 2\log(z), \quad i^i \in \mathbb{R}, \quad (\sqrt{z})^2 = \sqrt{z^2} = z.$$

Exercice 3.2. Principe de Weierstrass ([Po], p. 204-205). Soit $u_n(m)$ une suite de nombres complexes indexés par $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{m\to+\infty} u_n(m) = u_n$, et qu'il existe une suite (v_n) de nombres réels positifs telle que $\sum v_n < \infty$ et telle que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad |u_n(m)| \leq v_n.$$

Montrez de deux façons différentes que

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(m) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

On peut remarquer que l'on a ici une série absolument convergente qui domine globalement un processus localement convergent.

Si w_n est une suite de nombres complexes, on dit que le produit $\prod(1+w_n)$ converge si la suite $\prod_{n=0}^{N}(1+w_n)$ converge, et on note sa limite $\prod_{n=0}^{\infty}(1+w_n)$.

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, montrez que

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\prod_{n=0}^{\infty} (1+u_n(m)) \right) = \prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n).$$

On pourra pour cela, montrer qu'il existe un rang N à partir duquel $v_n < 1$, utiliser le logarithme complexe et prouver que, pour $|z| < 1$, $|\ln(1+z)| \leq \dfrac{|z|}{1-|z|}$.

Exercice 3.3. 1. Une application du principe de Weierstrass : montrez que, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \lim_{m\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m.$$

Une autre méthode consisterait à montrer que

$$\left| e^z - \left(1+\frac{z}{m}\right)^m \right| \leq e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{m}\right)^m,$$

puis utiliser le développement de $\ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. On définit P_m par

$$P_m(z) = \frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{iz}{2m}\right)^{2m} - \left(1-\frac{iz}{2m}\right)^{2m} \right]$$

Trouver les racines de P_m. En déduire que

$$\sin z = z \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m-1} \left(1 - \frac{z^2}{4m^2 \tan^2 \frac{n\pi}{2m}}\right), \qquad \text{puis que} \qquad \sin z = z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

4 Intégrale de Cauchy et Analyticité

Exercice 4.1. Soit γ un chemin fermé et $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$. Calculer directement à partir de la définition d'une intégrale curviligne,

$$\int_\gamma z^n dz.$$

Pour $n \leq -2$ on suppose que $0 \notin \gamma$ (pour le cas $n = -1$, voir le cours).

Exercice 4.2. Calculer

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1}, \qquad \int_{|z|=1} |z-1||dz|,$$

où les cercles sont orientés positivement.

Exercice 4.3. Soit f analytique dans un domaine qui contient un contour γ. Montrer que

$$\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z) dz$$

est imaginaire pur.

Exercice 4.4. Soit f analytique dans un domaine Ω et qui satisfait $|f(z) - 1| < 1$. Montrer que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

pour tout contour γ dans Ω.

Exercice 4.5. Soit $P(z)$ un polynome et C le cercle $|z - a| = R$. On souhaite calculer

$$I = \int_C P(z) d\overline{z}.$$

1. Ramener l'intégrale au cercle unité :

$$I = \int_{|z|=1} Q(z) d\overline{z},$$

où $Q(z)$ est un polynôme que l'on précisera.
2. Soit $Q(z) = q_n z^n + \cdots + q_0$, ce polynôme. Calculer l'intégrale en fonction de Q puis montrer que

$$I = -2i\pi R^2 P'(a).$$

Exercice 4.6. Soit $|a| \neq \rho$. Calculer

$$\int_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z - a|^2},$$

en se ramenant à la variable complexe.

Exercice 4.7. Logarithme d'une fonction holomorphe. Soit U un ouvert étoilé et $f : U \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe. Montrer qu'il existe $g \in H(U)$ telle que $e^g = f$. On pourra considérer une primitive de f'/f.

Exercice 4.8. Soit $r \in \mathbb{R}$ et

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right) d\theta.$$

1. Montrer que l'intégrale converge pour tout r réel. Comparer $I(r), I(-r)$ et $I(1/r)$.
2. En utilisant le théorème de Cauchy, calculer $I(r)$ pour $r > 1$ puis pour $0 \leq r < 1$.
3. En déduire $I(\pm 1)$ avec le théorème de convergence dominée.

Exercice 4.9. Formule de Cauchy à l'infini Soit g analytique en l'infini avec $g(\infty) = 0$. Soit γ un contour simple orienté négativement, dans le domaine d'analyticité de g. Soit z en dehors de γ. Montrer que

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{g(t)}{t - z} dt.$$

Exercice 4.10. On se propose de montrer directement que si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $f : U \to \mathbb{C}$ est de classe C^1 et vérifie $\partial f / \partial \overline{z} = 0$, alors, pour tout $z \in U$ et tout $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, r) \subset U$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Montrer qu'il suffit de vérifier que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

Pour $t \in [0, 1]$, on pose

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(z + tre^{i\theta}) d\theta.$$

Montrer que ϕ est dérivable, puis que ϕ est constante.

Exercice 4.11. Points singuliers sur le cercle de convergence. ([QZ, Ru]), [(D: 3, 7, 41, 43, 45)]. **1.** Justifier que l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ en lesquels une fonction f admet un développement en série entière est un ouvert.
2. Lemme de Lebesgue : Soit (E, d) un espace métrique et K un compact de E. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K. Montrez que :

$$\exists \epsilon > 0, \qquad \forall x \in K, \qquad \exists i \in I, \qquad B(x, \epsilon) \subset U_i.$$

3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. On dit que $a \in \partial U$ est régulier si f est définie en a et développable en série entière en ce point. Sinon, on dit que a est singulier de f. Soit f une série entière de rayon de convergence R, définie sur son disque de convergence. Vérifiez, à l'aide de 4 exemples bien choisis, que la notion de régularité en un point du cercle de convergence n'a pas de rapport avec la convergence de la série en ce point.
4. Déduire du lemme de Lebesgue l'existence d'un point singulier de la série f sur son cercle de convergence.
5. Posons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ (c'est un exemple de série lacunaire). Quel est son rayon de convergence ? Montrez que 1 est un point singulier, puis que tous les points $\exp(2ik\pi/2^n)$, $k, n \in \mathbb{N}$, sont singuliers, puis finalement tous les points du cercle de convergence sont singuliers.

5 Propriétés des fonctions holomorphes

Exercice 5.1. Propriété de la moyenne. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ et $f \in H(D(a,R))$. Montrez que

$$\forall r \in [0, R[, \qquad f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Exercice 5.2. Inégalités de Cauchy. Soient $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et $f \in H(D(a,R))$. On rappelle que

$$\forall r \in [0, R[, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

1. Montrez les inégalités de Cauchy : Si $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D(a,R)$, alors

$$\forall n \in N, \qquad |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! M}{R^n}.$$

2. En déduire que toute fonction entière bornée sur $\mathbb{C}$ est constante. (Théorème de Liouville).

3. Montrez le théorème de d'Alembert : tout polynôme non constant s'annule sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5.3. Soit f analytique dans $\mathbb{D}$ tel que $|f(z)|(1 - |z|) \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$. Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad |a_n| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) < e(n+1).$$

Exercice 5.4. Soit $f \in H(\mathbb{C})$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(z+i) = f(z+1)$. Montrez que f est constante.

Exercice 5.5. Soit $f \in H(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, Re $f(z) > 0$. Montrez que f est constante.

Exercice 5.6. Lemme de Schwarz. Soit f holomorphe dans le disque ouvert $\mathbb{D} = D(0,1)$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ sur $\mathbb{D}$ alors $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.
De plus, si $|f(z_0)| = |z_0|$ pour un $z_0 \in \mathbb{D}^*$ ou $|f'(0)| = 1$ alors il existe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$.

Exercice 5.7. Automorphismes du disque $\mathbb{D}$. 1. Montrer que

$$f_\varphi(z) = e^{i\varphi} z \qquad \text{et} \qquad g_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}, \quad |\alpha| < 1,$$

sont des automorphismes du disque.
2. Montrer que tout automorphisme de $\mathbb{D}$ est de la forme $e^{i\varphi} g_\alpha(z)$ avec $|\alpha| < 1$.

Exercice 5.8. Soit $f_n(z) = \sum_k a_{n,k} z^k$ une suite de fonctions entières. Montrer que

$$f_n \text{ converge localement uniformément vers } 0 \iff \lim_n \sup(|a_{n,0}|, |a_{n,1}|, |a_{n,2}|^{1/2}, \ldots) = 0.$$

Exercice 5.9. Soient $0 < r < R$ et $f \in H(D(0,R))$ bornée par M sur $D(0,r)$, telle que $f(0) \neq 0$. Soient $z_1, \dots, z_n$ les zéros de f (répétés suivant la multiplicité) dans $D(0,r)$.
1. Montrer que

$$\frac{r^n |f(0)|}{|z_1| \dots |z_n|} \leq M.$$

2. Soit $f \in H(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $A \in \mathbb{R}^+$ et $B \in [0,1[$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq A e^{B|z|}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 0$. Montrer que f est nulle. On rappelle la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad n \to \infty.$$

Exercice 5.10. Inégalité de Borel-Carathéodory. Soit $R > 0$ et f une fonction holomorphe non constante au voisinage de $\overline{D}(0,R)$. On pose

$$A(r) = \sup_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z) \qquad \text{pour } 0 \leq r \leq R.$$

1. Montrez que A est une fonction strictement croissante.
2. On suppose de plus que $f(0) = 0$. Vérifier que si $r > 0$,

$$A(r) > 0 \quad \text{et} \quad |2A(r) - f(z)| \geq |f(z)| \quad \text{pour} \quad |z| = r.$$

3. On suppose encore $f(0) = 0$. On pose $g(z) = \dfrac{f(z)}{2A(R) - f(z)}$. Montrer que

$$\left| \frac{g(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{R}, \qquad \forall z \text{ tel que } 0 \leq |z| \leq R.$$

En déduire l'inégalité de Borel-Carathéodory :

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{R - |z|} A(R) \qquad \text{sur } D(0,R).$$

Exercice 5.11. Intégrales de Fresnel. 1. Montrer que l'application F définie par

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt^2} dt$$

pour $z \in \mathbb{H} = \{\operatorname{Re} z > 0\}$ est holomorphe sur $\mathbb{H}$, et se prolonge continûment sur $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$. Pour le prolongement par continuité, on pourra montrer la convergence uniforme de $F_N(z) = \int_0^N e^{-zt^2} dt$ vers $F(z)$ quand $N \to \infty$ (avec une intégration par parties).
2. Déterminer F dans $\mathbb{H}$ (utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme afin d'obtenir une équation différentielle simple vérifiée par F, ou bien déterminer la restriction de la fonction à $]0, +\infty[$).
3. Convergence et calcul des intégrales de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2 \, dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \sin t^2 \, dt.$$

6 Singularités isolées des fonctions holomorphes

Exercice 6.1. Soient f et g entieres, telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |g(z)|$. Que peut-on dire de f et g ?

Exercice 6.2. Soit f entiere telle que $f(z) \to \infty$ quand $z \to \infty$. Montrer que f est un polynôme (considérer $f(1/z)$).

Exercice 6.3. Soit f une fonction entiere, non constante. Montrez que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6.4. Soit f holomorphe dans le disque unité épointé. Montrer que f a une singularité essentielle en 0 si et seulement s'il existe une suite $z_n \to 0$ telle que $f(z_n)$ n'ait pas de limite (finie ou non).

Exercice 6.5. On dit qu'une fonction $f(z)$ est algébrique s'il existe un polynôme $P(z, w)$ à 2 variables z et w, de degré au moins 1 en w, tel que $P(z, f(z)) = 0$, pour z dans l'ensemble de définition de f. Montrer qu'une fonction entière algébrique est un polynôme. En particulier, la fonction e^z est transcendante (i.e. n'est pas algébrique).

7 Fonctions méromorphes

Exercice 7.1. Soit $f(z) = \dfrac{z}{1+z+z^2}$.
a. Développer f en série entière au voisinage de 0.
b. Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?
c. Développer f en série de Laurent au voisinage des pôles.

Exercice 7.2. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{C}^*$ d'éléments deux à deux distincts telle que $\sum |a_n|$ converge. On pose

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z - a_n}.$$

Montrer que la série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}^*$ et que f est méromorphe dans $\mathbb{C}^*$. Quels sont les poles et résidus de f ?

8 Formule des résidus

Exercice 8.1. Théorème de Rouché.
1. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins fermés, paramétrés par le même intervalle $[a, b]$ et tels que $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|$, pour tout $t \in [a, b]$. Montrez que $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}\,\gamma_2(0)$.
2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f, g \in H(U)$ et $a \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(a, r) \subset U$. On suppose que

$$\forall z \in \partial D(a, r), \qquad |f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Montrez que les fonctions f et g ont le même nombre de zéros dans $D(a, r)$ (comptés avec leur multiplicité).
3. Application : Montrez qu'un polynôme de degré n a exactement n racines dans $\mathbb{C}$.
4. Autre application : Montrez que les 7 racines de $P(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ se trouvent dans la couronne $\{z \in \mathbb{C},\ 1 < |z| < 2\}$.

Exercice 8.2. Automorphismes de $\mathbb{C}$. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C}$.
1. Soit $g(z) = f(1/z)$. De quel type est la singularité de g en 0 ? (Utiliser le théorème de l'image ouverte).
2. En déduire que $f(z)$ est de la forme $az + b$ avec $a \neq 0$.

Exercice 8.3. Montrez que
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{16}.$$

Exercice 8.4. Montrez que, pour $a > 0$,
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a}.$$

Exercice 8.5. Montrez que
$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda} \qquad \text{pour } 0 < \lambda < 1.$$

Exercice 8.6. Montrez que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$
On pourra, pour $0 < \epsilon < R$ considérer le chemin $\gamma_{R,\epsilon}$ constitué de $[-R, -\epsilon]$, du demi cercle dans le demi-plan supérieur joignant $-\epsilon$ à ϵ, du segment $[\epsilon, R]$, du demi-cercle dans le demi-plan supérieur joignant R à $-R$, puis faire tendre ϵ vers 0 et R vers $+\infty$.

Exercice 8.7. Montrez que, pour a réel, on a :
$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sinh x} dx = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{\pi a}{2}, \qquad \int_0^\infty \frac{x \cos ax}{\sinh x} dx = \frac{\pi^2 e^{\pi a}}{(e^{\pi a}+1)^2}.$$
(intégrer le long d'un rectangle ayant pour sommets $\pm R$ et $\pm R + 2i\pi$ en évitant le point $2\pi i$ par un petit demi-cercle).

Exercice 8.8. Calculer les intégrales de Fresnel en intégrant la fonction $f(z) = e^{-z^2}$ sur le chemin formé du segment $[0, R]$, de l'arc de cercle de centre 0 et de rayon R donné par $0 \leq \theta \leq \pi/4$ et le segment $[0, Re^{i\pi/4}]$.

Bibliographie.

[**An**] M. Andersson, Topics in complex analysis, Springer.
[**AAR**] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special functions, Encyclop. of Maths and App. 71, Cambridge
[**CFM**] A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1, Masson.
[**Go**] X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Ellipses.
[**H**] L. Ahlfors, *Complex analysis*, Mc Graw Hill, 1979.
[**L**] S. Lang, *Complex analysis*, Graduate Texts in Mathematics 103, Springer.
[**Po**] A. Pommellet, *Agrégation de Mathématiques, Cours d'Analyse*, Ellipses, 1994.
[**QZ**] H. Queffelec, C. Zuily, Analyse pour l'agrégation.
[**Roos**] G. Roos, Analyse et Géométrie, Dunod.
[**Ru**] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson.
[**TAU**] P. Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3, Dunod.