Analyse Numérique – M 206 **Licence Semestre 4**

Devoir Surveillé – Février 2006 (1 heure)

Exercice 1 : Exprimer le polynôme P_n qui interpole une fonction f aux points $x_0, \dots, x_n$, dans la base de Newton associée à ces points.

Exercice 2 : Donner la formule de Cauchy (avec les hypotheses) permettant de majorer l'erreur en interpolation polynomiale.

Exercice 3 :

1. Déterminer une fonction σ sur $\mathbb{R}$ qui a les propriétés suivantes
   (a) σ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$;
   (b) $\sigma(t) = 0$ pour $t \leq 0$
   (c) σ est un polynôme de degré au plus égal à 1 pour $t \geq 0$;
   (d) la dérivée à droite σ'_d vaut 1 en 0.

   Cette fonction est-elle unique ?

2. Soient $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$, un entier $n \geq 2$ et des réels t_i tels que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions s qui ont les propriétés suivantes
   (a) s est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[a, b]$;
   (b) la restriction de s à chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme de degré au plus égal à 1;

   Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([a, b])$.

3. Expliquer pourquoi toute fonction s de $\mathcal{S}$ peut se mettre sous la forme
$$s(t) = \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \sigma(t - t_i).$$
   Donner une base de $\mathcal{S}$.

4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe une unique fonction $S(f)$ de $\mathcal{S}$ vérifiant
$$S(f)(t_i) = f(t_i), \quad i = 0, \dots, n.$$
   On écrira le système linéaire que doivent vérifier les coefficients de $S(f)$ dans une base de $\mathcal{S}$.

5. Si $f \in \mathcal{S}$, a-t-on $S(f) = f$ et pourquoi ?