Analyse Numérique – M 206 **Licence Semestre 4**

Devoir Surveillé Mai 2006

(1 heure)

Exercice 1 : Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ points dans $\mathbb{R}$. Donner les formules définissant les polynômes L_i, $i = 0, \ldots, n$, de la base de Lagrange associée à ces points.

Exercice 2 : Décrire en quelques lignes la méthode de Simpson permettant d'obtenir une valeur approchée pour l'intégrale d'une fonction continue.

Exercice 3 : Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ définie sur l'intervalle $[-5, 5]$.

1) A l'aide de la méthode des différences divisées, calculer le polynôme d'interpolation $g(x)$ de cette fonction aux points d'abscisses : $-5, -1, 1, 5$. On donnera le résultat dans la base de Newton associée puis dans la base canonique. Pourquoi ce polynôme est-il de degré 2 ?
Tracer (grossièrement) sur un même graphe $f(x)$ et $g(x)$.

2) On pose $e(x) = f(x) - g(x)$. Calculer les valeurs de x où $e(x)$ est extremum (maximum ou minimum) et donner les valeurs de $e(x)$ en ces points (indication : $g(x) = -\frac{1}{52}x^2 + \frac{27}{52}$).

3) Rappeler la formule de majoration de l'erreur d'interpolation $E(x)$ en 4 points pour une fonction C^4 sur un intervalle $[a, b]$.

4) En admettant que $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(1+x^2)^5}(5x^4 - 10x^2 + 1)$ (on le prouvera si on en a le temps) et que le maximum de $|f^{(4)}(x)|$ est atteint en $x = 0$, prouver que pour la fonction $f(x)$ on a la majoration : $|E(x)| \leq |(x^2 - 25)(x^2 - 1)|$.

5) Vérifier numériquement qu'on a bien aux extrema de $e(x)$ trouvés à la question 2) l'inégalité $|e(x)| \leq |E(x)|$.

6) Que peut-on en déduire sur la qualité de cette majoration en ces extrema ?