Université des Sciences et Technologies de Lille

M 206 : Analyse Numérique **Licence Semestre 4**

Devoir Surveillé - Février 2006 (1 heure)

Exercice 1 :
Enoncer clairement la formule de Cauchy donnant la majoration de l'erreur commise par l'interpolation polynômiale.

Exercice 2 :

1. Déterminer le polynôme p_3 de degré 3 qui interpole la fontion f de telle sorte que

x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	0	-2	5	3

2. Que vaut $f[5,0,1,3]$?
3. Calculer, par la méthode d'Horner, $p_3(2)$.

Exercice 3 :
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2([-1,1])$. Soit p le polynôme d'interpolation de f aux points

$$x_0(t) := -t \quad \text{et} \quad x_1(t) := t$$

avec $t \in [0,1]$. Le but de l'exercice est de montrer que le réel t minimisant l'erreur d'interpolation, n'est autre qu'un zéro du polynôme de Tchebychev.

1. Déterminer une constante $M > 0$, qui dépend uniquement de f, telle que pour tout $x \in [-1,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$, on ait
$$|f(x) - p(x)| \leq M \max_{x\in[-1,1]} |(x - x_0(t))(x - x_1(t))|\,.$$
2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$
$$\max_{x\in[-1,1]} |(x - x_0(t))(x - x_1(t))| = \max\{t^2, 1 - t^2\}.$$
En déduire que $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ minimise cette quantité.
3. Vérifier que $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est un zéro du polynôme de Tchebychev de degré deux $T_2(x) = \cos(2\arccos(x))$.
4. On considère la formule d'intégration approchée
$$T_t(f) := \lambda_0 f(x_0(t)) + \lambda_1 f(x_1(t)).$$
Montrer que $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ si et seulement si T_t est la méthode donnée par le polynôme d'interpolation p.
5. Montrer que
$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - T_{1/\sqrt{2}}(f)\right| \leq M.$$
6. Vérifier que pour $f(x) = \sqrt{2+x}$, on a
$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - T_{1/\sqrt{2}}(f)\right| \leq \frac{1}{4}\,\frac{1}{3^{3/2}}.$$