

Devoir Surveillé - Mai 2006 (1 heure)

Exercice 1 :

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0,1]$. Déterminer le polynôme d'interpolation p de degré 2 de la fonction f aux points 0, $5/12$ et 1, dans la base de votre choix.
2. Énoncer le corollaire de Cauchy permettant de majorer l'erreur en interpolation polynomiale, et adapter-le aux données de l'exercice.
3. Calculer la dérivée quatrième de f , notée $f^{(4)}$, et déterminer le maximum de $|f^{(3)}(x)|$ pour $x \in [0, 1]$.
4. Conclure sur la majoration d'erreur et la qualité de l'interpolant p .

Exercice 2 :

La concentration f d'un produit dans une solution est mesurée aux temps $x=0$ min, $x=1$ min, $x=2$ min, et $x=3$ min, et vaut respectivement 16, 18, 20, et 16 unités par millilitre. Le but de cet exercice est de prédire la concentration du produit pour $x=4$ min et de comprendre l'évolution de la concentration. Nous disposons ainsi du tableau suivant

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	16	18	20	16	?

1. À l'aide de la méthode des différences divisées, calculer le polynôme d'interpolation $p_3(x)$ de cette fonction f aux points d'abscisses : 0,1,2 et 3. Développer ce polynôme pour l'obtenir dans la base canonique.
2. À l'aide de l'algorithme d'Horner, calculer $p_3(4)$ (=concentration au temps $x=4$ mn) et $p_3'(4)$ (=indice sur la hausse ou diminution de la concentration).

Exercice 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de degré 2 de cette fonction f aux points $a, \frac{a+b}{2}$ et b (dans la base de Lagrange).
2. Calculer $S(f) = \int_a^b p(x)dx$. Quelle méthode classique d'intégration est retrouvée ?
3. Quelle est la règle composite correspondante ?