Université des Sciences et Technologies de Lille
DEUG MIAS $2^{ième}$ année 2002 / 2003

Analyse Numérique

DS 5 avril 2003

Il est important de donner des arguments complets, bien rédigés.

DOCUMENTS ET CALCULATRICES INTERDITS PENDANT L'EPREUVE

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (? points)

1. Soient donnés les points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$. Supposons que le polynôme d'interpolation correspondant est de degré $k < n$. Que peut-on dire des différences divisées
$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_k}],$$
pour les différents choix possibles de $i_0, i_1, i_2, \dots i_k$, appartenant à $0, 1, \dots n$?

2. On considère le tableau des différences divisées suivant :

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
1	5			
		2		
0	3		-3	
		-1		$-\frac{1}{2}$
2	1		-2	
		1		
-1	-2			

On veut ajouter le point d'interpolation $(3, 7)$. Calculer le polynôme d'interpolation correspondant dans la base de Newton associée aux noeuds $1, 0, 2, -1, 3$ ainsi que dans la base de Newton associée aux noeuds $-1, 2, 0, 1, 3$.

3. Donner en quelques phrases les différentes raisons pour lesquelles on préfère écrire le polynôme dans la base de Newton plutôt que dans la base de Lagrange.

Exercice 2 (? points)
Soit $p(x)$ le polynôme d'interpolation de degré au plus n qui passe par les points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$, avec
$$x_j = j \quad \text{et} \quad y_j = (C_{n+1}^j)^{-1} \qquad \text{pour} \quad j = 0, \dots, n.$$
(*On rappelle l'expression pour les coefficients binomiaux :* $C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$).

1. Donner l'expression de $p(x)$ dans la base de Lagrange.

2. Calculer la valeur $p(n+1)$.

   (*__Indication__ On établira l'identité suivante :* $\displaystyle\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{n+1-i}{k-i} = (-1)^{n-k} C_{n+1}^{k}$.)

Exercice 3 (? points)
Soit f une fonction à valeurs réelles telle que $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a,b])$. Soient $x_0, \ldots, x_n$, $n+1$ abscisses distinctes de $[a,b]$. On écrit $f(x) = p_n(x) + e_n(x)$, avec $p_n(x)$ le polynôme d'interpolation de f de degré au plus n.

1. Donner la formule de Cauchy pour l'erreur.

2. Soit $e_n'(x)$ la dérivée de l'erreur par rapport à x. Montrer que $e_n'(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$ si et seulement si f est un polynôme de degré au plus n.

3. On note $w_n(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$. Calculer $w_n'(x_i)$.

4. Montrer que $\forall i, \exists \xi_i \in [a,b]$ tel que

$$e_n'(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_i)}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n} (x_i - x_k).$$

5. Est-ce que le polynôme $p_n'(x)$ est le polynôme d'interpolation de $f'(x)$ aux abscisses $x_0, \ldots, x_n$?