2 — Espaces vectoriel normés

1 Normes

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur E une application N de E dans $[0, +\infty[$ telle que:

1. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,
2. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$,
3. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

On dit alors que (E, N) est un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{K}$). L'espace E est muni de la distance associée à la norme $d(x, y) := \|x - y\|$. Lorsqu'un e.v.n. est **complet** pour la métrique associée, on dit que c'est **un espace de Banach**.

On dit que deux normes N_1 et N_2 (sur un espace vectoriel E) sont équivalentes s'il existe deux constantes $0 < a < b$ telles que

$$a\, N_1(x) \;\leq\; N_2(x) \;\leq\; b\, N_1(x), \quad \forall x \in E.$$

Dans ce cas les distances associées sont aussi équivalentes et les topologies associées sont les mêmes.

Exemple 1: $\mathbb{K}^n$ muni de la norme N_p

Pour tout réel $p \geq 1$ on note souvent N_p la norme suivante définie sur $\mathbb{K}^n$

$$N_p(x) := \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

L'inégalité triangulaire pour la norme N_p s'appelle aussi "inégalité de Minskowsky". Le cas spécial N_2 est la "norme Euclidienne".

On note N_∞ la norme sur $\mathbb{K}^n$ définie par

$$N_\infty(x) := \sup_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Finalement on a une norme N_p pour tout $p \in [1, \infty]$. Si $p \in [1, +\infty]$ il existe un unique $q \in [1, \infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (avec la convention que $\frac{1}{\infty} = 0$). On dit souvent que q est l'exposant "conjugué" de p.

Théorème 1.1 (Holder)**.** *Soit $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors l'inégalité suivante a lieu*

$$\sum_i |x_i \; y_i| \;\leq\; N_p(x)\, N_q(y),$$

pour tout $x \in \mathbb{K}^n$.

Exemple 2: $C([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \; \|_p$

Pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ et tout réel p tel que $1 \leq p$ on note

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

On note de plus $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$. Alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\|.\|_p$ est bien une norme sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

Théorème 1.2 (Holder). *Soit* $p, q \in [1, +\infty]$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors l'inégalité suivante a lieu*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$.

Notez que lorsque $p = 2 = q$ **l'inégalité de Cauchy Schwarz**, que l'on reverra plus loin.
L'espace $C([a, b], \mathbb{R}), \| \ \|_p)$ n'est pas une espace de Banach (exercice en TD).

Exemple 3: ℓ^p muni de la norme $\| \ \|_{\ell^p}$

Pour $p \in [1, \infty[$ on définit ℓ^p comme l'espace des suite de nombres complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_n |x_n|^p$ converge et l'on munit ℓ^p de la norme

$$\|x\|_p := \big(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \big)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque $p = \infty$ on appelle ℓ^∞ l'espace des suites complexes bornées que l'on munit de la norme correspondante

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Ces quantités définissent effectivement bien des normes sur les espaces ℓ^p. La démonstration repose sur l'inégalité de Holder suivante:

Théorème 1.3 (Holder). *Soit* $p, q \in [1, +\infty]$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors l'inégalité suivante a lieu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n \ y_n| \ \leq \ \|x\|_p \, \|y\|_q,$$

pour tout $x \in \ell^p$.

Notez que lorsque $p = 2 = q$ on obtient ce qu'on appelle **l'inégalité de Cauchy Schwarz**, que l'on reverra plus loin.

Théorème 1.4. *Pour tout* $p \in [1, \infty]$, *l'espaces* $(\ell^p, \| \ \|_p)$ *est un espace de Banach.*

2 Applications linéaires continues

Théorème 2.1. *Soient* E *et* F *deux e.v.n. sur* $\mathbb{K}$ *et* L *une application linéaire de* E *dans* F. *Les 4 propriétés suivantes sont équivalentes:*
(1) L *est continue.*
(2) L *est continue à l'origine.*
(3) Il existe une constante $c > 0$ *telle que*

$$(\forall x \in E) \quad \|L(x)\|_F \ \leq \ c \, \|x\|_E. \tag{2.1}$$

On peut rallonger la liste. C'est aussi équivalent à "L est continue en un point de E" ou encore "L est bornée sur une boule de E", etc ...

Corollaire 2.2. *Si dimE est finie, toute application linéaire de* E *dans* F *est continue.*

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des **applications linéaires et continues** de E dans F. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On munit $\mathcal{L}(E, F)$ de la norme suivante, appelée "norme naturelle" ou "norme d'opérateur", et notée souvent $\| \ \|_{\mathcal{L}(E,F)}$ ou simplement $\| \ \|_{\mathcal{L}}$ quand il n'y a pas de risque de confusion sur les espaces.

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E}. \tag{2.2}$$

Proposition 2.3. *L'application ainsi définie* $\| \ \|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *est une norme sur* $\mathcal{L}(E,F)$. *Si L appartient à* $\mathcal{L}(E,F)$*:*

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \|L(x)\|_F = \sup_{x\in E, \|x\|<1} \|L(x)\|_F = \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|L(x)\|_F.$$

Théorème 2.4. *Si* F *est complet, alors* $\mathcal{L}(E,F)$ *est complet (sous-entendu: muni de la norme naturelle* $\| \ \|_{\mathcal{L}(E,F)}$*).*

Proposition 2.5. *Soient* E, F, G *des espaces vectotiels normés sur* $\mathbb{K}$.
(1) Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $v \in \mathcal{L}(F,G)$ *alors* $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$ *et* $\|v \circ u\|_{\mathcal{L}} \leq \|v\|_{\mathcal{L}} \ \|u\|_{\mathcal{L}}$.
(2) Si $u \in \mathcal{L}(E)$*:* $\|u^n\|_{\mathcal{L}} \leq \|u\|^n_{\mathcal{L}}$*, où* $u^n = u \circ \cdots \circ u$.

Proposition 2.6. *Soit* E *un espace de Banach et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. *Alors* $I - u$ *est bijectif,* $(I-u)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ *et l'on a*

$$(I-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \tag{2.3}$$

cette série étant convergente dans l'espace $\big(\mathcal{L}(E), \| \ \|_{\mathcal{L}(E)}\big)$.

Pour la démonstration on utilise le résultat suivant:
Théorème *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach. Dans* E*, toute série absolument convergente (on dit aussi "normalement convergente") est convergente.*

• Exemple d'application 1: le dual topologique d'un e.v.n. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. On appelle "dual topologique" de $(E, \| \ \|)$ l'espace vectoriel normé formé des formes linéaires continues sur E, muni de sa norme naturelle, c'est à dire l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On le note traditionnellement E'. Le théorème 2.4 entraine que E' est toujours complet, (même si E ne l'est pas):

Corollaire 2.7. *Soit* $(E, \| \ \|)$ *un e.v.n. sur* $\mathbb{K}$. *Son dual topologique* $(E', \| \ \|_{\mathcal{L}})$ *est un espace de Banach.*

Par exemple, si $1 \leq p < \infty$ considérons l'espace ℓ^p. Si q est tel que $1/p + 1/q = 1$ (avec $q = \infty$ lorsque $p = 1$) , alors pour tout $y \in \ell^q$ l'application

$$\sigma_y : x \in \ell^p \mapsto \sum x_n y_n \in \mathbb{K}$$

est un élément de $(\ell^p)'$. On montre que $\|\sigma_y\|_{(\ell^p)'} = \|y\|_q$. On montre de plus que tout élément L de $(\ell^p)'$ est de cette forme là, c'est à dire qu'il existe un unique élément de ℓ^q tel que $L = \sigma_y$. On résume cela par le théorème (démontré en exercice de TD).

Théorème 2.8. *Soit* $p \in [1, \infty[$. *Le dual topologique de* ℓ^p *s'identifie à l'espace* ℓ^q*, où* $1/p + 1/q = 1$ *(et* $q = \infty$ *lorsque* $p = 1$*).*

• Exemple d'application 2: prolongement par densité et continuité

Théorème 2.9. *Soit* E *et* F *deux un evn sur* $\mathbb{K}$, F *étant complet. On suppose que* V *est un sous-espace vectoriel et* E*, dense dans* E*, et* L *une application linéaire continue de* V *dans* F*:* $L \in \mathcal{L}(V,F)$. *Alors,* L *se prolonge de manière unique en une application* $\tilde{L} \in \mathcal{L}(E,F)$. *De plus,* $\|\tilde{L}\|_{\mathcal{L}} = \|L\|_{\mathcal{L}}$.

Dans cet énoncé, l'espace V est muni de la norme de E, c'est à dire de la métrique induite (ou de la topologie induite) par E. L'hypothèse de continuité de L signifie qu'il existe une constante $c > 0$ telle que: $\forall v \in V : \ \|L(v)\|_F \leq \|v\|_E$.

3 Dimension finie

Théorème 3.1. *Soit E est un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$. Toutes les normes sur E sont équivalentes. En outre pour toute norme N, (E, N) est un espace de Banach et il existe un isomorphisme isométrique entre E et $\mathbb{K}^n$.*

Plus précisemment, si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, l'application de $\mathbb{R}^n$ dans E

$$\varphi : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum x_i e_i$$

est un isomorphisme et si l'on munit justement $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|u\| := N\big(\varphi(u)\big)$ (il s'agit bien d'une norme sur $\mathbb{R}^n$) alors φ est une isométrie, donc en particulier φ est un homéomorphisme.

Corollaire 3.2. *Soit E est un espace vectoriel normé de dimension finie n sur $\mathbb{K}$. Les compacts de E sont les fermés bornés.*

Ce théorème admet une réciproque:

Théorème 3.3 (Riesz)**.** *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. La boule unité fermée de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

• **Exemple d'application: l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.** L'espace des matrices $n \times n$ est un espace normé de dimension n^2, qui est isomorphe et isométrique à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Sa norme naturelle est $\|M\| := \|u\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ où u est l'application linéaire associée à M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Elle dépend de la norme choisie pour $\mathbb{R}^n$ et elle satisfait l'inégalité

$$\|MN\| \leq \|M\| \, \|N\|, \quad \forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Cette norme est équivalente à toute autre norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais qui en général ne vérifie pas cette inégalité. Par exemple, on démontre les résultats suivants :

Théorème 3.4. *Le groupe orthogonal $O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | {}^t MM = I\}$ est un* **compact** *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
Le groupe $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \det M \neq 0\}$ est un **ouvert dense** *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

4 Espaces de Hilbert

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle produit scalaire sur E une application $< .,. >$ de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes
1/ $< .,. >$ est bilinéaire
2/ $\forall x, y \in E : < x, y > = < y, x >$ (la forme $< .,. >$ est symétrique)
3/ $\forall x \in H, x \neq 0 \Rightarrow < x, x > > 0$ (la forme $< .,. >$ est définie positive) .

Proposition 4.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $< .,. >$. Alors la formule $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ définit une norme sur E, appelée la "norme associée au produit scalaire". En outre on a l'inégalité suivante appelée inégalité de "Cauchy-Schwarz":*

$$\forall x, y \in E : \quad | < x, y > | \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Exemples de produits scalaires.
1/ Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$: $< x, y > = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. La norme associée est la norme euclidienne N_2 de $\mathbb{R}^n$.
2/ Le produit scalaire de ℓ^2: $< x, y > = \sum_0^\infty x_n \, y_n$. La norme associée est la $\| \, \|_2$ de ℓ^2.
3/ Un produit scalaire dans $C([a, b], \mathbb{R})$: $< f, g > = \int_a^b f(t) \, g(t) dt$. La norme correspondante est la norme $\| \, \|_2$ sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

Définition. On appelle "espace de Hilbert (sur $\mathbb{R}$)" tout espace vectoriel H sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $< .,. >$ qui est **complet** pour la norme associée.

Exemple d'espaces de Hilbert.

1/ L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, mais on l'appelle plutot "l'espace Euclidien".

2/ L'exemple typique est l'espace ℓ^2 muni du produit scalaire naturel.

3/ L'espace $C([a,b])$ muni du produit scalaire $< f, g >= \int_a^b f(t)\, g(t) dt$ n'est pas complet pour la norme associée: ce n'est pas un espace de Hilbert (on dit parfois que c'est un espace "pré-hilbertien", car on verra que l'on peut le compléter en un espace hilbertien).

Projection sur un convexe fermé

Théorème 4.2. *Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de H. Pout tout $x \in H$ il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. On dit que y est la projection orthogonale de x sur C et on note $y = P_C(x)$.*

Théorème 4.3. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors $H = F \oplus F^{\perp}$, de plus l'application P_F coïncide avec la projection algébrique sur F suivant la somme directe $H = F \oplus F^{\perp}$.*

Corollaire 4.4. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Un sous-espace vectoriel V de H est dense dans H si et seulement si $V^{\perp} = \{0\}$.*

Repésentation des formes linéaires continues. Si H est un espace de Hilbert et si $x \in H$, l'application linéaire de H dans $\mathbb{R}$ $< ., x >$ qui à $y \in H$ associe le réel $< y, x >$, est continue sur H comme le montre l'inégalité de Cauchy-Schwarz. C'est donc un élément de H', le dual topologique de H. Le théorème de représention de Riesz affirme que la réciproque est vraie, c'est à dire que tous les éléments de H' sont de cette forme:

Théorème 4.5. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et $L \in H'$ une forme linéaire continue sur H. Il existe un et un seul $x \in H$ tel que $L =< ., x >$. De plus $\|L\|_{\mathcal{L}} = \|x\|_H$. L'application $x \mapsto < ., x >$ est un isomorphisme isométrique entre H et H'.*

Bases Hilbertiennes On dit que deux éléments a_1 et a_2 de H sont orthogonaux si $< a_1, a_2 >= 0$. Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de H, on dit que c'est "une famille orthogonale" ou encore "un système orthogonal" si pour tout $i, j \in I : i \neq j$ implique $< a_i, a_j >= 0$. Si $(a_1, \cdots, a_n)$ est une famille orthogonale de H, on a la formule suivante, encore appelée "théorème de Pythagore":

$$\| \sum_{j=0}^{n} a_j \|^2 = \sum_{j=0}^{n} \|a_j\|^2$$

On dit qu'un famille $(e_i)_{i \in I}$ est "orthonormée" si elle est orthogonale et si pour tout $i \in I$: $\|e_i\| = 1$.

Théorème 4.6. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Pour toute suite de réels $x_n, n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$ converge dans H si et seulement si $\sum x_n^2 < \infty$. Dans ce cas si l'on note x la somme de cette série, on a encore la formule de Pythagore*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 \tag{4.1}$$

où $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, e_n$.

Dans cette formule, on a forcément (par continuité du produit scalaire) $x_n =< x, e_n >$. Cependant, en général on ne décrit pas tout les éléments de H comme une somme d'une telle série et du coup l'égalité (4.1) **n'est pas vraie** pour tous les éléments de H. On a cependant l'inégalité suivante appelée inégalité de Bessel:

Lemme 4.7. *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système orhonormé de H et x un élément de H.*

$$\forall x \in H: \ \|x\|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n >^2 \tag{4.2}$$

En outre on a égalité dans (4.2) si et seulement si $x = \sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n > e_n$.

Définition 4.8. *Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H si l'espace vectoriel engendré par les $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans H.*

Lemme 4.9. *Soit $(u_j), j \in \{1, \cdots, n\}$ une famille orthonormée d'un espace de Hilbert H et soit $F =$ Vect$\{u_1, \cdots, u_n\}$. Pour tout $x \in H$,*

$$P_F(x) = \sum_{j=0}^{j=n} < x, u_j > u_j \ .$$

Théorème 4.10. *Soit H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*
1/ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne
2/ $\forall x \in H: \ [< x, e_n >= 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0]$.
3/ $\forall x \in H: \ x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$, où $x_n =< x, e_n >$.

Proposition 4.11. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Pour tout $x, y \in H$ on a:*

$$< x, y >= \sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n >< y, e_n >,$$

En particulier on a $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n >^2$. Réciproquement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système othonormé de H et si pour tout $x \in H$ on la la formule

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} < x, u_n >^2$$

alors la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de H.

Théorème 4.12. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, séparable. Alors il existe des bases hilbertiennes dénombrables de H. Plus précisément, tout système orthonormé de H peut être complété en une base hilbertienne.*

Nous verrons de "vrais exemples" non triviaux (autres que ℓ^2) d'espaces de Hilbert lorsque nous aurons vu l'intérale de Lebesgue. Neanmoins ces exemples seront des espaces de Hilbert séparables et donc isométriques à ℓ^2 !