CMI, Université de Provence
Année 2010-2011

Licence 3ème année

TP3 : Méthodes itératives de relaxation pour la résolution de systèmes linéaires

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $N \in \mathbb{N}^\star$ à coefficients réels, symétrique et définie positive (s.d.p.) et b un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^N$. On note $(.,.)$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^N$ et $|.|$ la norme euclidienne. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on cherche à résoudre numériquement le système linéaire :

$$Ax = b \tag{1}$$

par des méthodes itératives de relaxation dites "stationnaires".

1. Laplacien 1-D

On considère la matrice carrée $A = A_h$ tridiagonale d'ordre N de discrétisation en différences finies du Laplacien 1-D (son opposé en fait, cf. cours), *i.e.*

$$A_h = \frac{1}{h^2} Tridiag(-1, 2, -1)$$

où $h = \dfrac{1}{N+1}$ désigne le pas de maillage uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$, et b le vecteur constant dont toutes les composantes sont égales à 1.

Comparer à l'aide de programmes en *Scilab* la vitesse de convergence des méthodes itératives suivantes (cf. cours) :

- Jacobi,
- Gauss-Seidel,
- Relaxation S.O.R.(ω) avec paramètre optimal,

On tracera notamment sur un même graphique pour $N = 100$ la variation, pour chaque méthode, de $|r_k|$ en fonction du nombre d'itérations k, où $r_k = b - Ax_k$ pour $k \in \mathbb{N}$ désigne le résidu de l'itération k, avec un vecteur initial nul $x_0 = 0$. Conclusion ?

Comment varie, pour chaque méthode, le nombre d'itérations nécessaires pour satisfaire le critère d'arret : $|r_k| \leq \epsilon = 10^{-6}$, quand $N = 10$, 20, 50, ou 100. Conclusion ?

2. Laplacien 2-D, versions ponctuelles

On considère maintenant le système linéaire d'ordre $N = n^2$ provenant de la discrétisation par différences finies du problème modèle 2-D sur un maillage uniforme de pas $h = 1/(n+1)$, *i.e.* le problème de Poisson dans le carré $]0, 1[\times]0, 1[$ avec conditions aux limites de Dirichlet, i.e. $A_h = -\Delta_h$ correspondant à la numérotation lexicographique (ordre naturel ligne par ligne ou colonne par colonne) des inconnues et définie par :

$$a_{i,i} = \frac{4}{h^2}, \quad a_{i,i-n} = a_{i,i-1} = a_{i,i+1} = a_{i,i+n} = -\frac{1}{h^2}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

On rappelle que les valeurs propres de A_h sont :

$$\lambda_{ij}(A_h) = \frac{4}{h^2}\left(\sin^2(\frac{i\pi h}{2}) + \sin^2(\frac{j\pi h}{2})\right) > 0, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

et donc que le conditionnement de A_h varie comme $\kappa(A_h) = \mathcal{O}(\frac{1}{h^2})$.

Reprendre l'étude précédente pour cette matrice A_h et pour les versions ponctuelles de ces méthodes itératives. Conclusion ?

3. Laplacien 2-D, versions par blocs

En remarquant que la matrice A_h en 2-D est tridiagonale par blocs d'ordre n, refaire l'étude précédente avec les versions par blocs des méthodes itératives considérées. Les blocs seront "inversés" par des méthodes directes à l'aide de fonctions *Scilab*. Conclusion ?

$\square$