CMI, Université de Provence **Licence 3ème année**
Année 20010-2011

TP3: résolution d'équations non linéaires

Dans cette scéance on étudie des méthodes de résolution d'équations non linéaires du type $f(x) = 0$. On se place dans le cadre où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On a déjà travaillé sur la méthode de dichotomie et on va travailler sur la méthode du point fixe et la méthode de Newton.

1 Présentation des méthodes

1.1 Méthode de point fixe

On se donne une fonction F (continue !) choisie de telle sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = x \Longleftrightarrow f(x) = 0.$$

On peut par exemple prendre $F(x) = f(x) + x$, ou $F(x) = \alpha f(x) + x$ ($\alpha \neq 0$), ou bien d'autres encore.

La résolution de l'équation $f(x) = 0$ est donc équivalente à la recherche d'un **point fixe** de F c'est-à-dire d'une solution de $F(x) = x$. On applique pour cela l'algorithme itératif suivant (où x_{init} est le point de départ qu'on choisit pour le début des itérations).

$$\begin{cases} x_0 &= x_{init} \\ x_{n+1} &= F(x_n) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que si la suite $(x_n)_n$ est convergente, alors sa limite est bien solution du problème étudié.
2. Connaissez-vous une condition sur la fonction F qui assure la convergence de la suite $(x_n)_n$?

1.2 Méthode de Newton

On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^1$. La méthode de Newton consiste à construire la suite des itérées définie par

$$\begin{cases} x_0 &= x_{init} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases} \tag{2}$$

1. Quelle condition sur f vous semble nécessaire pour pouvoir utiliser cette méthode ?
2. Montrer que la méthode de Newton correspond à une méthode de point fixe pour une fonction F que l'on précisera.

2 Mise en oeuvre et exemples

On écrira des fonctions Scilab qui renvoient la solution approchée x_a d'une équation $f(x) = 0$ évaluée par l'une des méthodes décrites précédemment (on prendra $F(x) = f(x) + x$ pour définir la méthode du point fixe) ainsi que le nombre d'itérations N nécessaires pour l'obtenir.

Les fonctions auront pour arguments d'entrée

- le premier terme x_0,
- la fonction f, et pour la méthode de Newton sa fonction dérivée,
- la tolérance `tol` fixée par l'utilisateur : l'algorithme s'arrêtera dès que $|f(x_n)| <$ `tol`.

Ceci donne donc à programmer deux fonctions

```
function [x,N]=pointfixe(f,x0,tol)
function [x,N]=newton(f,deriveef,x0,tol)
```

2.1 Comparaison des trois algorithmes

1. Programmer les deux méthodes ci-dessus et les tester sur l'équation $f(x) = e^{-x} - \sin(x) = 0$ pour différentes valeurs de `tol` (par exemple 10^{-3}, 10^{-6} et 10^{-10}) et de x_0. On testera aussi la méthode de la dichotomie sur le même problème.

   Commentez les résultats obtenus.

2. **L'équation du temps de Kepler:** On se donne $e \in]0, 1]$ et $t \in \mathbb{R}$ fixés. On cherche $x \in \mathbb{R}$ vérifiant
$$t = x - e\sin(x). \tag{3}$$
   Cette équation, due à Kepler, permet de retrouver la position x d'une planète sur son orbite (qui est une ellipse d'excentricité $e < 1$) si l'on connaît le temps t qui s'est écoulé depuis le passage de la planète au périhélie de sa trajectoire (point le plus rapproché du soleil).

   (a) Combien de solutions réelles possède l'équation (3).

   (b) Pour quelles valeurs de $e \in]0, 1]$ et de $t \in \mathbb{R}$, est-ce que la fonction $F(x) = t + e\sin(x)$ vérifie la condition usuelle de convergence de la méthode du point fixe discutée dans la partie 1.1 ?

   (c) Malgré tout, vérifier numériquement que la méthode du point fixe converge pour toutes les valeurs de t et $e \in]0, 1]$.

   (d) Ecrire la méthode de Newton pour résoudre l'équation (3) et comparer numériquement les deux méthodes pour ce problème.

2.2 Vitesse de convergence

On appelle x^* une solution de l'équation $f(x^*) = 0$.

Definition 2.1 Pour une suite de réels $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x^*, on dit que la convergence vers x_a est:

- **linéaire** : s'il existe une constante $\boxed{C < 1}$ telle que pour k assez grand, on a

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|.$$

- **quadratique** : s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour k assez grand, on a

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^2. \tag{4}$$

1. Modifier vos programmes pour récupérer également en sortie toute la suite des itérées successives $(x_0, x_1, .., x_N)$.

2. Pour chacune des méthodes considérées, et sur un ou deux exemples, tracer $|x_{k+1} - x^*|$ en fonction de $|x_k - x^*|$ pour $0 \leq k \leq N - 1$. Comment pouvez-vous qualifier la convergence de chacune des méthodes ?

3. Qu'observe-t'on si on essaie d'utiliser les deux méthodes proposées pour résoudre l'équation $x^2 = 0$ (dont bien entendu on connaît bien la solution exacte ...)

N.B. : Pour effectuer le travail demandé ci-dessus, il est *a priori* nécessaire de connaître la solution exacte x^* du problème qui est, en général, inconnue. Pour pouvoir néanmoins observer le comportement de l'erreur on va remplacer la vraie valeur de x^* par une valeur approchée très précise (obtenue dans une première étape en utilisant vos programmes avec une tolérance très petite).