Université Aix-Marseille **2016-2017**

Agrégation Mathématiques
Correction du Devoir Surveillé Novembre 2016

Problème 1

1. Soit $z = x + iy$. On a

$$\begin{aligned} 4|\sin z|^2 &= |e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}|^2 = e^{-2y} - e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y} \\ &= 4\cosh^2 y - 2 - 4\cos^2 x + 2 = 4\sin^2 x + 4\sinh^2 y. \end{aligned}$$

La formule

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y,$$

se vérifie de manière identique.

2. On en déduit que $\sin az = 0$ ssi $ax = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $y = 0$. De même, $\cos az = 0$ ssi $ax = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $y = 0$.

3. Soit $-\pi < a < \pi$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour $z = n + \frac{1}{2} + iy$,

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right|^2 \leq \frac{\sin^2((n+1/2)a) + \sinh^2(ay)}{1 + \sinh^2(\pi y)} \leq \frac{1 + \sinh^2(ay)}{1 + \sinh^2(\pi y)} = \frac{\cosh^2 ay}{\cosh^2 \pi y},$$

et on prouve de même la 2ieme inégalité.

4. La fonction $\sin \pi z$ a des zéros simples aux points $z = n$, $n \in \mathbb{Z}$, et en ces points $\cos \pi z$ ne s'annule pas donc la fonction $\cot \pi z$ est bien méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec des poles simples en $z = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Pour z près de n, $\pi \cot \pi z$ se comporte comme $(-1)^n/(-1)^n(z-n)$ ce qui montre que le résidu au point n égal 1.

5. Sur les cotés verticaux du rectangle, on a

$$|\cot \pi z| = \left|\frac{e^{-\pi t \pm (n+1/2)i\pi} + e^{\pi t \mp (n+1/2)i\pi}}{e^{-\pi t \pm (n+1/2)i\pi} - e^{\pi t \mp (n+1/2)i\pi}}\right| = \left|\frac{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}{e^{-\pi t} + e^{\pi t}}\right| = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| \leq 1,$$

où $x = e^{2\pi t} \geq 0$. Sur les cotés horizontaux du rectangle, on a

$$|\cot \pi z| = \left|\frac{e^{i\pi t \mp (n+1/2)\pi} + e^{-i\pi t \pm (n+1/2)\pi}}{e^{i\pi t \mp (n+1/2)\pi} - e^{-i\pi t \pm (n+1/2)\pi}}\right| \leq \frac{e^{(n+1/2)\pi} + e^{-(n+1/2)\pi}}{e^{(n+1/2)\pi} - e^{-(n+1/2)\pi}} = \left|\frac{x+1}{x-1}\right|,$$

où, dans la 1ere inégalité, on a majoré les modules des 2 termes du numérateur et minoré le dénominateur en remarquant qu'un terme est sur un cercle de rayon $e^{(n+1/2)\pi}$ et l'autre sur un cercle de rayon $e^{-(n+1/2)\pi}$. Dans la derniere égalité, on a posé $x = e^{(2n+1)\pi} \geq e^{3\pi}$. Comme $(x+1)/(x-1)$ est décroissante pour $x > 1$, on en déduit que $|\cot \pi z| \leq (e^{3\pi} + 1)/(e^{3\pi} - 1)$.

Soit d_P et d_Q les degrés de P et Q, et a_{d_P} et a_{d_Q} les coefficients dominants. On a, pour $|z|$ grand,

$$|f(z)| \sim \left|\frac{a_{d_P} z^{d_P}}{a_{d_Q} z^{d_Q}}\right| \leq \left|\frac{a_{d_P}}{a_{d_Q} z^2}\right|,$$

d'où le résultat.

6. On a, pour n grand,

$$\left|\int_{\gamma_n} f(z) \cot \pi z dz\right| \leq \frac{M_1}{\pi} K \int_{\gamma_n} \frac{|dz|}{|z|^2} \leq \frac{M_1}{\pi} \frac{K}{(n+1/2)^2} \int_{\gamma_n} |dz| = \frac{4KM_1}{\pi(n+1/2)^2}(2n+1),$$

d'où le résultat. L'inégalité (2) montre que $\lim_{n\to\infty} \sum_{-n\leq p\leq n} f(p)$ existe. Pour n grand, tous les poles de f sont dans le carré γ_n, donc, par le théorème des résidus,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_n} f(z)\pi \cot \pi z dz &= 2i\pi \sum_{p=-n}^{n} \mathrm{Res}(f(z)\pi \cot \pi z, p) + 2i\pi \sum_{q=1}^{m} \mathrm{Res}(f(z)\pi \cot \pi z, a_q) \\ &= 2i\pi \sum_{p=-n}^{n} f(p) + 2i\pi \sum_{q=1}^{m} b_q \pi \cot \pi a_q\end{aligned}$$

et en faisant $n \to \infty$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n\leq p\leq n} f(p) = -\sum_{1\leq q\leq m} b_q \pi \cot \pi a_q.$$

7. Dans le 1er exemple, la fonction f est donnée par $f(z) = (a+bz)^{-2}$ dont les poles sont

$$(a/b)^{1/2} i \text{ et } -(a/b)^{1/2} i \text{ de résidus } i/(2(ab)^{1/2}) \text{ et } -i/(2(ab)^{1/2}).$$

On en déduit que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+bn^2)} = \frac{i}{\sqrt{ab}} \pi \cot(i\pi\sqrt{a/b}) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \coth(\pi\sqrt{a/b}).$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+bn^2)} = \frac{i}{\sqrt{ab}} \pi \cot(i\pi\sqrt{a/b}) = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \coth(\pi\sqrt{a/b}) - \frac{1}{2a}.$$

8. On suppose $\deg Q = \deg P + 1$. Alors la division de zP par Q s'écrit $zP = cQ + \widetilde{Q}$ avec $\deg \widetilde{Q} < \deg Q$ ce qui donne $f(z) = \widetilde{Q}/(zQ) + c/z$ où $\widetilde{Q}/(zQ)$ vérifie les conditions de 5. Il reste à montrer que

$$\int_{\gamma_n} \frac{\cot \pi z}{z} dz = 0,$$

qui est une simple conséquence du fait que $\cot \pi z/z$ est paire et que γ_n est symétrique par rapport à l'origine.

9. La fonction associée est $f(z) = (x-z)^{-1}$ de pole x et de résidu -1 donc

$$\lim_{n\infty} \sum_{-n\leq p\leq n} \frac{1}{x-p} = \pi \cot \pi x.$$

D'autre part, pour x non entier,

$$\sum_{p\geq 1}\frac{1}{x^2-p^2}=\frac{1}{4x}\left[\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-p}+\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x+p}\right]-\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2x}\left(\pi\cot\pi x-\frac{1}{x}\right).$$

10. La parité de $\cos(\alpha z)/(z\sin\pi z)$ entraine que

$$\int_{\gamma_n}\frac{e^{i\alpha z}}{z\sin\pi z}dz=i\int_{\gamma_n}\frac{\sin(\alpha z)}{z\sin\pi z}dz=2i\int_{\gamma_n'}\frac{\sin(\alpha z)}{z\sin\pi z}dz+2i\int_{\gamma_n''}\frac{\sin(\alpha z)}{z\sin\pi z}dz.$$

Pour $z=(n+1/2)+iy$ sur γ_n', on a, avec la 1ere inégalité de la question 3.,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_n'}\frac{\sin(\alpha z)}{z\sin\pi z}dz\right|&\leq\frac{1}{n+1/2}\int_{-n-1/2}^{n+1/2}\frac{\cosh\alpha y}{\cosh\pi y}dy=\frac{2}{n+1/2}\int_0^{n+1/2}\frac{\cosh\alpha y}{\cosh\pi y}dy\\&=\frac{2}{n+1/2}\left(\int_0^{\sqrt{n}}\frac{\cosh\alpha y}{\cosh\pi y}dy+\int_{\sqrt{n}}^{n+1/2}\frac{\cosh\alpha y}{\cosh\pi y}dy\right)\\&\leq\frac{2}{n+1/2}\left(\sqrt{n}+(n+1/2)\sup_{y\in[\sqrt{n},n+1/2]}\frac{\cosh\alpha y}{\cosh\pi y}\right)\end{aligned}$$

qui tend vers 0 avec n. Pour $z=x+i(n+1/2)$ sur γ_n'', on a, avec la 2ieme inégalité de la question 3.,

$$\left|\int_{\gamma_n''}\frac{\sin(\alpha z)}{z\sin\pi z}dz\right|\leq\int_{\gamma_n''}\frac{1}{n+1/2}\frac{\cosh(\alpha(n+1/2))}{\sinh\pi(n+1/2)}|dz|\leq 2\frac{\cosh(\alpha(n+1/2))}{\sinh\pi(n+1/2)}$$

qui tend vers 0 avec n.

11. En écrivant $f(z)$ comme dans 8., on a

$$\int_{\gamma_n}f(z)\frac{e^{i\alpha z}}{\sin\pi z}dz=\int_{\gamma_n}g(z)\frac{e^{i\alpha z}}{\sin\pi z}dz+c\int_{\gamma_n}\frac{e^{i\alpha z}}{z\sin\pi z}dz$$

avec, pour n assez grand,

$$\left|\int_{\gamma_n}g(z)\frac{e^{i\alpha z}}{\sin\pi z}dz\right|\leq M_2\int_{\gamma_n}\frac{K}{|z|^2}|dz|$$

d'où l'on déduit, avec le résultat de la question 10., que

$$\lim_{n\infty}\int_{\gamma_n}f(z)\frac{e^{i\alpha z}}{\sin\pi z}dz=0.$$

D'autre part, le théorème des résidus donne

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_n}f(z)\frac{e^{i\alpha z}}{\sin\pi z}dz&=2i\pi\sum_{p=-n}^{n}\mathrm{Res}(f(z)\frac{e^{i\alpha z}}{\sin\pi z},p)+2i\pi\sum_{q=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)\frac{e^{i\alpha z}}{\sin\pi z},a_q)\\&=2i\pi\sum_{p=-n}^{n}\frac{(-1)^p}{\pi}f(p)e^{i\alpha p}+2i\pi\sum_{q=1}^{m}b_q\frac{e^{i\alpha a_q}}{\sin\pi a_q}\end{aligned}$$

d'où la formule demandée en faisant tendre n vers l'infini.

12. La fonction $f(z) = (x-z)^{-1}$ a un pole en x (supposé non entier) de résidu -1, donc, pour $-\pi < \alpha < \pi$,

$$\lim_{n\infty} \sum_{-n\leq p\leq n} (-1)^p \frac{e^{i\alpha p}}{x-p} = \pi \frac{e^{i\alpha x}}{\sin \pi x}$$

soit

$$\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left[\left(\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x+p} \right) \cos \alpha p + i \left(\frac{1}{x-p} - \frac{1}{x+p} \right) \sin \alpha p \right] + \frac{1}{x} = \pi \frac{e^{i\alpha x}}{\sin \pi x}$$

qui donne les deux formules demandées.

Problème 2

1. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C}$ et g tel que $g(z) = f(1/z)$. Alors g a une singularité en 0 (sinon $f(z)$ aurait une limite quand $|z| \to \infty$ et f serait constante par Liouville). La singularité ne peut pas être essentielle car sinon, l'image d'un voisinage de 0 par g (ou d'un voisinage de l'infini par f) serait $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}$ privé d'un point et f ne pourrait pas être bijective. Donc 0 est un pole de g, ce qui entraine que $f(z)$ se comporte comme $a_k z^k$, $k \geq 1$, à l'infini. Les inégalités de Cauchy (par exemple) montrent que f est un polynôme. Comme f est bijective, ce polynôme est forcément de degré 1, avec un coefficient dominant non nul (par le théorème de d'Alembert).

2. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C}^*$.
(a) Supposons d'abord que f se prolonge en 0, avec $f(0) = y$. Si $y \neq 0$, il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = y$. Soit V un voisinage de y en bijection avec un voisinage U de x dont on peut supposer qu'il ne rencontre pas 0. Par continuité de f, il existe un voisinage de 0 qui ne rencontre pas U dont l'image est dans V. Cela contredit la bijectivité de f. Donc $f(0) = 0$ et f est un automorphisme de $\mathbb{C}$ donc de la forme $z \mapsto az + b$.
Supposons maintenant que f est singulière en 0. Par le théorème de Picard, cette singularité n'est pas essentielle (car f bijective) donc c'est un pole, donc, pour z dans un voisinage de 0, f est de la forme

$$f(z) = a_m z^m + \cdots, \quad m < 0,\ a_m \neq 0.$$

Comme $z \mapsto 1/z$ est un automorphisme de $\mathbb{C}^*$, la fonction $g(z) = f(1/z)$ l'est aussi, donc par ce qui précède, pour z dans un voisinage de 0,

$$g(z) = a_M z^{-M} + \cdots, \quad -M < 0,\ a_M \neq 0,$$

c'est à dire, pour z dans un voisinage de l'infini,

$$f(z) = \cdots + a_M z^M, \quad M > 0,\ a_M \neq 0,$$

En comparant les deux développements de f (qui doivent coincider) on en déduit que

$$f(z) = a_m z^m + \cdots + a_M z^M, \quad m \leq M.$$

(b) La fonction $z^{-m}f(z)$ est un polynôme. S'il n'est pas constant, il admet une racine non nulle qui est donc un zéro de f, mais cela contredit le fait que l'image de f est $\mathbb{C}^*$.

(c) De la question précédente découle que $f(z) = a_m z^m$, $m \in \mathbb{Z}$, mais comme f est bijective, on ne peut qu'avoir $m = \pm 1$.

(d) Une fonction $f(z)$ est un isomorphisme entre $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$ si et seulement si la fonction $f(z+z_0) - z_1$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$. Réciproquement, une fonction $f(z)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ ssi $f(z-z_0)+z_1$ est un isomorphisme de $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$. Donc ces derniers sont de la forme $a(z-z_0)^{-1} + z_1$ et $b(z-z_0) + z_1$.

3. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ qui vérifie la propriété (A).
(a) La propriété (A) entraine que f se prolonge en 0 en une fonction analytique (théorème de Riemann sur les singularités artificielles) et que $f(0) = y \notin \{0, 1\}$. On peut raisonner comme dans la question 2.(a). Soit $y = f(x)$ avec $x \notin \{0, 1\}$ et V un voisinage de y en bijection avec un voisinage U de x dont on peut supposer qu'il ne rencontre pas 0. Par continuité de f, il existe un voisinage de 0 qui ne rencontre pas U dont l'image est dans V, ce qui contredit la bijectivité de f.

(b) Si $\alpha = 0$, il est clair que f se prolonge en un automorphisme g de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ vérifiant $g(0) = 0$. D'après la question 2.(d) les formes de f sont $z \mapsto a(z-1)^{-1}+1$ et $z \mapsto b(z-1)+1$ avec $-a + 1 = 0$ et $-b + 1 = 0$ donc on obtient $z \mapsto z/(z-1)$ et $z \mapsto z$.

(c) Si $\alpha = 1$, on a un automorphisme de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}^*$. On obtient alors $z \mapsto 1/(1-z)$ et $z \mapsto -z + 1$.

4. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
(a) La fonction $z \mapsto 1/z$ est un automorphisme de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ donc en composant, $1/f$ l'est aussi. Si f ne vérifie pas (A) alors 0 est une singularité de f, qui ne peut pas être essentielle (toujours par Picard et l'injectivité de f) donc c'est un pole donc $1/f$ se prolonge en 0 par 0.

(b) Avec les questions 3.(a) et 3.(b) on obtient les 6 automorphismes de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$:

$$z \mapsto z, \quad z \mapsto \frac{z}{z-1}, \quad z \mapsto 1 - z, \quad z \mapsto \frac{1}{1-z}, \quad z \mapsto \frac{1}{z}, \quad z \mapsto \frac{z-1}{z}$$

5. L'ensemble $\mathbb{C}$ est homogène car, pour $x, y \in \mathbb{C}$, on a $y = x + b$ avec $b = (y - x)$. L'ensemble $\mathbb{C}^*$ est homogène car, pour $x, y \in \mathbb{C}^*$, on a $y = bx$ avec $b = y/x$. L'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ n'est pas homogène puisque l'ensemble de ses automorphismes est fini.