Université Aix-Marseille **2017-2018**

Agrégation Mathématiques
Correction du Devoir Surveillé Novembre 2017

Problème 1

1. Soit N pair, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{z-n} = \left(\frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}\right) + \cdots + \left(\frac{-1}{z-(N-1)} + \frac{1}{z-N}\right)$$
$$= \frac{1}{(z-1)(z-2)} + \cdots + \frac{1}{(z-(N-1))(z-N)}.$$

Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $z \in K \setminus \mathbb{N}^*$. Comme le terme général de la somme précédente est d'ordre N^{-2} en module pour N grand, indépendamment de z dans K, cette somme est uniformément convergente sur $K \setminus \mathbb{N}^*$. De plus, comme $(z-n)^{-1}$ tend vers 0 pour n grand, uniformément sur K, on en déduit que la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/(z-n)$ est aussi uniformément convergente sur $K \setminus \mathbb{N}^*$.

2. La fonction $f(w)/(w-z)$ est méromorphe et elle a les poles simples $-N, -N+1, \ldots N-1, N$ et z. Le résidu de $f(w)$ en un pole $-N \leq n \leq N$ est donné par

$$\lim_{w \to n} \frac{\pi(w-n)}{\sin \pi w} = \frac{1}{\cos \pi n} = (-1)^n,$$

donc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n}{n-z} + \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

3. L'intégrale est nulle car $f(w)/w$ est paire et le carré C_N est symétrique par rapport à l'origine. L'idendité entre les 2 intégrales provient simplement de

$$\frac{z}{w(w-z)} = \frac{1}{w-z} - \frac{1}{w}.$$

4. Soit $w = x + iy$. On a

$$4|\sin w|^2 = |e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}|^2 = e^{-2y} - e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y}$$
$$= 4\cosh^2 y - 2 - 4\cos^2 x + 2 = 4\sin^2 x + 4\sinh^2 y.$$

Les 2 minorations qui suivent s'en déduisent facilement. On sait par les questions précédentes que

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n}{z-n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{\pi}{\sin \pi w} \frac{z}{w(w-z)} dw.$$

Soit z dans un disque de rayon $R < N$ fixé. L'intégrale est majorée en module par

$$\sup_{w \in C_N} |f(w)| \frac{R\ell(C_N)}{N(N-R)} \leq \frac{4\pi R(2N+1)}{N(N-R)}.$$

En faisant $N \to \infty$, on obtient donc

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{z-n} + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2-n^2},$$

où la somme est uniformément convergente sur les compacts de $\mathbb{C}$, privés des points de $\mathbb{Z}$, d'après la question 1.

5. Les zéros (simples) de $\sin(\pi z)$ dans $D(0,R)$ sont des singularités artificielles de f_N car ils correspondent aux zéros du numérateur de f_N dans $D(0,R)$. Par suite, f_N est holomorphe et non nulle dans $D(0,R)$.

6. Il suffit de dériver la fonction $\gamma(t)e^{-F(t)}$. On obtient

$$\gamma'(t)e^{-F(t)} - \gamma(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}e^{-F(t)} = 0.$$

7. La formule provient de $f_N(0) = 1$ et $\gamma'(t) = zf_N'(tz)$.

8. D'après la définition de f_N, on a

$$\frac{f_N'(w)}{f_N(w)} = \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2z}{w^2-n^2} - \pi\frac{\cos(\pi w)}{\sin(\pi w)}.$$

Par la formule admise dans la question 5., on obtient donc, pour N suffisamment grand, que $|f_N'(w)|/|f_N(w)| \leq \epsilon$ pour w dans $D(0,R)$, privé des points de $\mathbb{Z}$. Mais, comme f_N'/f_N est continue dans $D(0,R)$, l'inégalité est en fait vérifiée partout dans $D(0,R)$. L'inégalité $|f_N(z)| \leq e^{\epsilon|z|}$ provient alors de l'identité prouvée dans 8.

9. La famille des f_N, N assez grand, est uniformément bornée dans le disque fermé $D(0,R)$ (on peut considérer $R+1$ à la place de R dans la question précédente). Par le théorème de Montel, il existe une sous-suite convergente vers une limite holomorphe f qui vérifie $|f(z)| \leq 1$ dans $|z| \leq R$. Mais on a aussi $f(0) = 1$ donc, par le principe du maximum, f est la fonction constante 1. Comme toute sous-suite qui converge a pour limite la fonction constante 1, c'est que toute la suite f_N converge vers cette limite. On en déduit la formule (1).

Problème 2

1. La 1ere inégalité découle de l'inégalité (qui se prouve aisément)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1 + x \leq e^x.$$

La 2ieme inégalité est évidente pour $N = 1$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour N. On a

$$|p_{N+1} - 1| = |p_N(1+u_{n+1}) - 1| \leq (p_N^* - 1)(1 + |u_{n+1}|) + |u_{n+1}| = p_{N+1}^* - 1.$$

2. Soit $\epsilon > 0$. Par convergence uniforme, il existe un entier N tel que
$$\forall s \in S, \qquad \left| u(s) - \sum_{n=1}^{N} |u_n(s)| \right| \leq \epsilon.$$
Donc
$$\forall s \in S, \qquad |u(s)| \leq \sum_{n=1}^{N} |u_n(s)| + \epsilon \leq \sum_{n=1}^{N} \sup_{s \in S} |u_n(s)| + \epsilon,$$
qui est fini. La propriété demandée sur la fonction p_N découle alors aisément des inégalités de la question 1.

3. On a
$$\begin{aligned} |p_M(s) - p_{N_0}(s)| &= \left| \prod_{n=N_0+1}^{M} (1 + u_n(s)) - 1 \right| |p_{N_0}(s)| \\ &\leq \left(\exp\left(\sum_{n=N_0+1}^{M} |u_n(s)| \right) - 1 \right) |p_{N_0}(s)| \leq 2\epsilon |p_{N_0}(s)|, \end{aligned}$$
et p_{N_0} et bornée sur S par une constante C.

4. La suite p_N vérifie le critère de Cauchy uniforme d'où la convergence uniforme vers une fonction f sur S. L'inégalité de la question précédente nous dit que
$$(1 - 2\epsilon)|p_{N_0}(s)| \leq |p_M(s)|.$$
En supposant $\epsilon < 1/2$ et en faisant tendre M vers l'infini, on obtient que les zéros de f sont forcément parmi les zéros de p_{N_0}.

5. Soit K un compact de Ω. En choisissant $S = K$ et $u_n = f_n - 1$ (qui est bornée sur K) dans les questions précédentes, on obtient que f converge uniformément sur K, et que f ne s'annule que si l'une des f_n s'annule. Par le rappel de l'énoncé découle que $f \in H(\Omega)$.

6. L'implication directe est une conséquence de l'inégalité
$$\prod_{n=1}^{N} (1 - u_n) \leq \exp(-u_1 - \cdots - u_N).$$
Pour l'implication indirecte, on peut utiliser la question précédente avec les applications constantes $f_n(z) = 1 - u_n$. On en déduit en particulier que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - u_n)$ ne s'annule que si l'un des facteurs s'annule, ce qui n'arrive pas puisque $u_n < 1$.

7. Il est immédiat que $g_a \in E(\mathbb{D})$. Une fonction g de $E(\mathbb{D})$ ne peut avoir qu'un nombre fini de zéros, sinon il y aurait une suite de zéros convergente vers un point de $\partial\mathbb{D}$, ce qui contredirait le fait que g y est de module 1. Soit $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de g. Alors, la fonction
$$G(z) = \frac{g(z)}{\prod_{i=1}^{n} g_{a_i}(z)}$$
est sans zéros dans $\overline{\mathbb{D}}$ et de module 1 sur $\partial\mathbb{D}$. Il en est de même de la fonction $1/G$. Par le principe du maximum appliqué à G et $1/G$, on a que G est de module 1 sur $\overline{\mathbb{D}}$, ce qui entraine qu'elle est constante (et de module 1).

8. Comme suggéré dans l'énoncé, on écrit

$$f(rz) = z^k g_{a_1/r}(z) \dots g_{a_n/r}(z) h(z),$$

avec h analytique dans un ouvert contenant $\overline{\mathbb{D}}$. Alors, par le principe du maximum sur $\overline{\mathbb{D}}$, on a $\sup_{z \in \mathbb{D}} |h(z)| \leq M$. L'égalité précédente en $z = 0$ s'écrit

$$r^k \frac{f^k(0)}{k!} = \frac{a_1}{r} \cdots \frac{a_n}{r} h(0) \quad \text{d'où} \quad \frac{|f^k(0)|}{k!} \leq \frac{|a_1| \dots |a_n|}{r^{n+k}} M.$$

9. L'inégalité demandée s'obtient en appliquant l'inégalité de la question précédente avec $r < R = 1$, tel que $D(0, r)$ contient $a_1, \dots, a_n$, puis en faisant tendre r vers 1. La suite $\prod_1^n |a_i|$ est décroissante, minorée par une constante non nulle, donc sa limite existe et est non nulle.

10. On considère une suite $(a_i)_{i \geq 1}$ dans $\mathbb{D}$ telle que $\prod_1^\infty |a_i|$ est non nulle. On veut montrer qu'il existe une fonction de $B(\mathbb{D})$ dont les zéros sont les a_i, $i \geq 1$. On considère donc le produit infini $G(z)$ donné dans l'énoncé. Pour montrer que cela définit une fonction de $H(\mathbb{D})$, on utilise la question 5 : dans le compact $|z| \leq r < 1$, on a

$$\left| 1 - \frac{|a_i|}{a_i} g_{a_i}(z) \right| = \left| \frac{(1 - |a_i|)(a_i + |a_i| z)}{a_i (1 - \bar{a}_i z)} \right| \leq \frac{1 + r}{1 - r} (1 - |a_i|),$$

où on a utilisé la majoration de l'énoncé (qui se prouve aisément). Par la question 6, $\sum_{i=1}^\infty (1 - |a_i|)$ converge, ce qui entraine la convergence uniforme sur tout compact de $G(z)$ qui définit bien une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$, dont les zéros sont exactement les a_i, $i \geq 1$. De plus, il est clair que G est borné dans $\mathbb{D}$, puisque chacun de ses facteurs est de module plus petit que 1 dans $\mathbb{D}$.

11. Supposons f non nulle. On applique le résultat de la question 8 dans un disque de rayon n qui contient les zéros $1, 2, \dots, n-1$ de f, avec $k \geq 1$ désignant la multiplicité de 0 en tant que zéro de f (de sorte que $f^{(k)}(0) \neq 0$). Cela donne

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{(n-1)! A e^{Bn}}{n^{n+k-1}} = A e^{Bn} \frac{n!}{n^{n+k}}.$$

Par Stirling, quand n tend vers l'infini, le majorant est de l'ordre de

$$A e^{(B-1)n} \frac{\sqrt{2\pi n}}{n^k},$$

qui tend vers 0 (car $B \leq 1$ et $k \geq 1$). Cela contredit le fait que $f^{(k)}(0) \neq 0$.