Agrégation Mathématiques
Correction du Devoir Surveillé Octobre 2018

Problème 1

1. On applique le théorème rappelé au début du sujet avec la fonction

$$f(z, x) = \frac{\exp(2xz - z^2)}{z^{n+1}} : \mathcal{C} \times U \rightarrow \mathbb{C},$$

où on choisit pour U un ouvert borné de $\mathbb{C}$. La fonction $f(z, x)$ est continue, holomorphe en x , et majorée sur $\mathcal{C} \times U$ par une constante. Donc le théorème s'applique, ce qui donne

$$H'_{n+1}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} 2 \exp(2xz - z^2) \frac{dz}{z^{n+1}} = 2H_n(x), \quad n \geq 0.$$

Il est clair que $H_0(x) = 1$. On en déduit par récurrence que $H_n(x)$ est un polynôme de degré n .

2. On fait un changement de variable dans l'intégrale en posant $u = z + x$, ce qui donne

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}+x} \frac{e^{-(u-x)^2} du}{u^{n+1}} = \frac{e^{-x^2}}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}+x} \frac{e^{-u^2+2xz} du}{u^{n+1}} = e^{-x^2} H_n(x),$$

car $\mathcal{C} + x$ est toujours un contour autour de l'origine. On reconnaît dans l'intégrale :

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \right)_{z=-x} = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \right)_{z=x},$$

où la dernière égalité découle de la parité de e^{-z^2} .

3. Le fait que $\varphi(x) \in L^1(e^{-x^2} dx)$ découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De manière identique,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} |\varphi(x)| e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ax} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 e^{-x^2} dx,$$

où les deux intégrales de droite sont convergentes.

4. On peut écrire

$$\Phi(z) = e^{-z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2xz} \varphi(x) e^{-x^2} dx.$$

On applique le théorème rappelé au début du sujet à l'intégrale, en considérant l'espace $L^1(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$. On choisit pour U un ouvert borné incluant $a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b$. Il est clair que i. et ii. sont vérifiés. De plus

$$|e^{2xz} \varphi(x)| = e^{2x \operatorname{Re}(z)} |\varphi(x)| \leq (e^{2ax} + e^{2bx}) |\varphi(x)|,$$

qui est dans $L^1(e^{-x^2} dx)$ d'après la question précédente. On en déduit que Φ est holomorphe dans U et donc entière (en prenant des ouverts U de plus en plus grands).

5. En appliquant la formule intégrale pour le coefficient de Taylor, on obtient

$$a_n(\varphi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-z)^2}}{z^{n+1}} \varphi(x) dx dz,$$

où $\mathcal{C}$ est un cercle centré en 0 de rayon $R > 0$. D'après la question précédente, le module de l'intégrande peut être majoré, indépendamment de $z \in \mathcal{C}$, par une fonction de x intégrable (et $|z| = R$ pour $z \in \mathcal{C}$). On peut donc appliquer Fubini, ce qui donne

$$a_n(\varphi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{-(x-z)^2}}{z^{n+1}} \varphi(x) dz dx.$$

Pour un x fixé, on fait le changement de variable $z = u + x$ avec $u \in \mathcal{C} - x$. Comme pour $\mathcal{C}$ assez grand, $\mathcal{C} - x$ contient x , on peut appliquer le 1er résultat de la question 2, ce qui donne la formule demandée.

6. a) En permutant la dérivation et l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi'_{n+1}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} e^{-(x-z)^2} H_{n+1}(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} e^{-(x-z)^2} H_{n+1}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-z)^2} H'_{n+1}(x) dx = 2\Phi_n(x), \end{aligned}$$

où dans l'avant-dernière égalité, on a utilisé une intégration par parties, et dans la dernière égalité le résultat de la question 1.

b) On a, pour $n \geq 1$,

$$\Phi_n(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-x^2})^{(n)} dx = \frac{(-1)^n}{n!} \left[(e^{-x^2})^{(n-1)} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

car la fonction entre crochets tend vers 0 quand $|x|$ tends vers l'infini.

c) Comme $H_0(x) = 1$, on a, pour z réel,

$$\Phi_0(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-z)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

et l'égalité se prolonge à $\mathbb{C}$ puisque $\Phi_0(z)$ est entière.

On en déduit alors par intégration successive que

$$\Phi_n(z) = \frac{2^n \sqrt{\pi}}{n!} z^n.$$

7. L'intégrale à calculer n'est autre que $a_p(H_q) = a_q(H_p)$, c'est à dire le p -ième coefficient de Taylor de Φ_q . On trouve donc 0 si $p \neq q$ et

$$\alpha_p = \frac{2^p \sqrt{\pi}}{p!} \quad \text{si } p = q.$$

8. on a $f \in L^1(dx)$ car, avec Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int |\varphi(x)| e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \int |\varphi(x)|^2 e^{-x^2} dx \cdot \int e^{-x^2} dx < +\infty.$$

9. D'après la définition de $\Phi(z)$, on a

$$e^{-\pi^2 y^2} \Phi(-i\pi y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xy} e^{-x^2} \varphi(x) dx,$$

c'est à dire que l'on obtient la transformée de Fourier $\mathcal{F}(e^{-x^2} \varphi(x))$. Si tous les $a_n(\varphi)$ sont nuls alors Φ est nulle donc $\mathcal{F}(e^{-x^2} \varphi(x))$ est nulle donc $\varphi(x)$ est nulle presque partout (par injectivité de la transformée de Fourier sur L^1).

10. La famille $(H_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale de l'espace de Hilbert $L^2(e^{-x^2} dx)$ qui est totale puisque, pour $\varphi \in L^2(e^{-x^2} dx)$, on a

$$\forall n \geq 0, \quad \langle H_n, \varphi \rangle = 0 \quad \implies \quad \varphi = 0 \quad \text{p.p.}$$

Autrement dit, c'est une base hilbertienne de $L^2(e^{-x^2} dx)$.

Problème 2

1.a. La fonction Φ est une fonction holomorphe de z sauf si

$$1 - 2/z^2 \in (-\infty, 0] \iff 2/z^2 \in [1, +\infty) \iff z^2 \in (0, 2] \iff z \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

Pour $z \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, on a $1 - 2/z^2 \in (0, 1)$ donc

$$\Phi(z) = z \exp \left(\log \sqrt{\frac{z^2 - 2}{z^2}} \right) = z \sqrt{\frac{z^2 - 2}{z^2}} = \frac{z}{|z|} \sqrt{z^2 - 2},$$

d'où le résultat.

1.b. En effectuant le changement de variable $w = 1/u$, on est ramené à l'étude de la limite quand $R \rightarrow 0$ de

$$\int_{C(0,R)} \frac{u\Phi(1/u) - 1}{(1 - uz)u^2} du,$$

avec $u\Phi(1/u) = \exp(\frac{1}{2} \log(1 - 2u^2))$ analytique dans un voisinage de 0. L'intégrande est donc une fonction méromorphe, avec un pôle double en 0 et un pôle simple en $1/z$ (si $z \neq 0$). Pour R petit, seul le pôle en 0 est à l'intérieur de $C(0, R)$, donc il suffit de calculer le résidu en 0. On développe donc l'intégrande au voisinage de 0 ce qui donne

$$\frac{1}{u^2} (1 - u^2 + \mathcal{O}(u^4) - 1)(1 + uz + \mathcal{O}(u^2)) = 1 + uz + \mathcal{O}(u^2),$$

donc le résidu est nul, ainsi que l'intégrale.

2. On suppose que $C(0, R)$ est orienté positivement et le rectangle noté Γ_ϵ est orienté négativement. La question 1.b. entraîne que, pour le cercle,

$$\int_{C(0,R)} \frac{\Phi(w)}{w - z} dw = \int_{C(0,R)} \frac{w}{w - z} dw = z.$$

Pour le rectangle, il faut évaluer la limite de $\Phi(z)$ lorsque z s'approche de $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
D'une part

$$\frac{1}{2} \log(z^2) \rightarrow \sqrt{z^2} = |z|, \quad \text{lorsque } z \rightarrow \mathbb{R}.$$

D'autre part, d'après la définition du logarithmique complexe,

$$\log(z^2 - 2) \rightarrow \begin{cases} \log(2 - z^2) + i\pi & \text{lorsque } z \rightarrow [0, \sqrt{2}] \text{ au dessus,} \\ \log(2 - z^2) - i\pi & \text{lorsque } z \rightarrow [0, \sqrt{2}] \text{ en dessous,} \\ \log(2 - z^2) - i\pi & \text{lorsque } z \rightarrow [-\sqrt{2}, 0] \text{ au dessus,} \\ \log(2 - z^2) + i\pi & \text{lorsque } z \rightarrow [-\sqrt{2}, 0] \text{ en dessous,} \end{cases}$$

et donc

$$\Phi(z) \rightarrow \begin{cases} i\sqrt{2 - z^2} & \text{lorsque } z \rightarrow [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \text{ au dessus,} \\ -i\sqrt{2 - z^2} & \text{lorsque } z \rightarrow [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \text{ en dessous.} \end{cases}$$

On en déduit que, lorsque ϵ tend vers 0,

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\Phi(w)}{w - z} dw \rightarrow 2i \int_{[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} \frac{\sqrt{2 - x^2}}{x - z} dx.$$

Finalement, avec la formule de Cauchy, on obtient

$$z + 2i \int_{[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} \frac{\sqrt{2 - x^2}}{x - z} dx = 2i\pi\Phi(z),$$

qui est la formule demandée.

3. Comme la suite $(H_n)_n$ admet une limite simple, avec le théorème de Montel, il suffit de montrer qu'elle est uniformément bornée sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Soit K un tel compact. Il est à une certaine distance $\delta > 0$ de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \geq 1$, et $z \in K$,

$$|H_n(z)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma_n(t)}{z - t} \right| \leq \frac{1}{\delta}.$$