Université Aix-Marseille **2019-2020**

Agrégation Mathématiques
Correction du Devoir Surveillé Octobre 2019

Exercice 1

1. On applique Rouché avec les fonctions holomorphes $f(z) = ze^{a-z} - 1$ et $g(z) = ze^{a-z}$. D'une part $g(z)$ a un seul zéro dans le disque $|z| < 1$ et, d'autre part, pour $|z| = 1$, on a

$$|f(z) - g(z)| = 1 \quad \text{et} \quad |g(z)| = |e^{a-z}| = e^{\mathrm{Re}\,(a-z)} = e^{a-\mathrm{Re}\,(z)} > 1,$$

où la dernière inégalité est vérifiée car $a > 1$.

2. La racine de f est un réel > 0 car $f(0) = -1$, $f(1) = e^{a-1} - 1 > 0$, et on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 2

Sur le demi-cercle de rayon R, on a

$$\left| \int_{C_R} \frac{\sqrt{z}\ln(z)}{(z^2+1)^2} dz \right| \leq \frac{\sqrt{R}(\ln(R)^2 + \pi^2)^{1/2}}{(R^2-1)^2} \pi R \to 0 \quad \text{quand} \quad R \to \infty.$$

Sur le demi-cercle de rayon ϵ, on a

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{\sqrt{z}\ln(z)}{(z^2+1)^2} dz \right| \leq \frac{\sqrt{\epsilon}(\ln(\epsilon)^2 + \pi^2)^{1/2}}{(1-\epsilon^2)^2} \pi \epsilon \to 0 \quad \text{quand} \quad \epsilon \to 0.$$

Le contour contient le pole i de multiplicité 2 dont le résidu vaut

$$\left(\frac{\sqrt{z}\ln(z)}{(z+i)^2} \right)'(i).$$

Après un calcul (qu'il faudrait détailler...), on obtient la valeur

$$\frac{1}{8} e^{i\pi/4}(2i + \pi/2) = \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} - 2 \right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) i \right).$$

Pour $z \in [-R, -\epsilon]$ avec $z = -x$, $x > 0$, on a

$$\frac{\sqrt{z}\ln(z)}{(z^2+1)^2} = \frac{i\sqrt{x}(\ln(x) + i\pi)}{(x^2+1)^2},$$

donc, en notant $\gamma_{R,\epsilon}$ le contour complexe, on a

$$\lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0} \int_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{\sqrt{z}\ln(z)}{(z^2+1)^2} dz = I + (iI - J), \quad \text{avec} \quad J = \int_0^\infty \frac{\pi\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} dx.$$

En appliquant la formule des résidus, et en prenant la partie imaginaire, on obtient

$$I = \mathrm{Im}\left(2i\pi(i/8)(2i + \pi/2)e^{-i\pi/4} \right) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

En considérant la partie réelle, on pourrait aussi déterminer la valeur de J mais ce n'était pas demandé.

Problème : Théorème de Jentzsch

1. Les zéros de $S_n(z)$ sont les racines $(n+1)$-ieme de l'unité, différentes de 1 :

$$e^{2ik\pi/(n+1)}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

L'ensemble des $e^{2ik\pi/(n+1)}$, $n \geq 1$, $k = 1, \dots, n$, est dense dans le cercle unité. On peut le justifier en disant que les nombres rationnels sont denses dans $[0, 1]$.

2. Une suite infinie d'entiers n tels que $a_n \neq 0$ existe sinon f serait un polynome, de rayon de convergence infini.

3. On a $|\pi_n| = |a_0/a_n|$ et, par Hadamard, $\limsup_n |a_n|^{1/n} = 1$ d'où le résultat.

4. On suppose que f n'a pas de zéros sur le cercle de rayon r, sinon on choisit un cercle de rayon $r' < 1$ plus grand sur lequel c'est vrai (un tel r' existe...). Comme $S_n \to f$ uniformément dans $\overline{D}(0, r)$, on peut appliquer Rouché. On en déduit que, pour n assez grand, S_n et f ont le même nombre (fini) de zéros, disons k, dans $\overline{D}(0, r)$. De plus, par hypothèse, $f(0) \neq 0$ et par continuité, on peut minorer par une constante, disons $2a > 0$ le module des zéros de f. En appliquant Rouché sur le cercle de rayon a, on obtient que, pour n assez grand, S_n n'a pas de zéros dans $D(0, a)$. On en déduit que le produit des zéros de S_n qui sont de modules inférieurs à r est minoré par a^k. Ensuite, on a $p_n - k$ zéros qui sont de modules compris entre r et R et $n - p_n$ zéros qui sont de modules plus grand que R, ce qui conduit à la minoration demandée.

5. En prenant la racine n-ieme dans l'inégalité précédente, on obtient

$$1 = \liminf_n |\pi_n|^{1/n} \geq \liminf_n r^{p_n/n} R^{1-p_n/n}.$$

Avec $r = R^{-\epsilon} < 1$, $\epsilon > 0$ petit, on a

$$1 \geq \liminf_n R^{1-(1+\epsilon)p_n/n} \quad \text{donc} \quad 0 \geq \liminf_n (1 - (1+\epsilon)p_n/n) \ln(R)$$

d'où

$$\limsup_n \frac{p_n}{n} \geq \frac{1}{1+\epsilon}$$

et le résultat en faisant $\epsilon \to 0$.

6. L'image de $\mathbb{T}$ par une homographie est un cercle ou une droite. Ici, c'est un cercle car le pole $1/\cos\lambda$ n'est pas sur $\mathbb{T}$. Le cercle en question est le cercle $\mathbb{T}$ lui-même car

$$\left| \frac{e^{it} - \cos\lambda}{1 - e^{it}\cos\lambda} \right| = \left| \frac{1 - e^{-it}\cos\lambda}{1 - e^{it}\cos\lambda} \right| = 1.$$

L'image de $\mathbb{D}$ est $\mathbb{D}$ car $\varphi(0) = -\cos\lambda \in \mathbb{D}$. De plus $\varphi(1) = 1$,

$$\varphi(e^{i\lambda}) = \frac{2i\sin\lambda}{1 - e^{2i\lambda}} = -e^{-i\lambda}, \qquad \varphi(e^{-i\lambda}) = -e^{i\lambda}.$$

On en déduit que l'image de l'arc $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$ (parcouru dans le sens positif) est l'arc $-\pi + \lambda \leq \theta \leq \pi - \lambda$ (parcouru dans le sens positif).
Un simple calcul montre que

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z + \cos \lambda}{1 + z \cos \lambda}.$$

7. Le polynôme s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (z + \cos \lambda)^k (1 + z \cos \lambda)^{n-k}.$$

Il est clair que le terme constant b_0 vaut $S_n(\cos \lambda)$. Pour le terme de degré 1 on obtient

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left((n-k) \cos^{k+1} \lambda + k \cos^{k-1} \lambda\right) \\ &= n \cos \lambda S_n(\cos \lambda) + \sum_{k=0}^{n} a_k \left(-k \cos^{k-1} \lambda (1 - \sin^2 \lambda) + k \cos^{k-1} \lambda\right) \\ &= n \cos \lambda S_n(\cos \lambda) + \sin^2 \lambda S_n'(\cos \lambda). \end{aligned}$$

On pouvait aussi calculer la valeur de $R_n'(0)$.

8. Pour n assez grand, $z_{n,k} \neq \cos \lambda$, car $f(\cos \lambda) \neq 0$, donc $w_{n,k} \neq 0$ et on peut considérer leur inverse dont la somme vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{w_{n,k}} = -\frac{b_1}{b_0}.$$

En prenant les parties réelles et en divisant par n, on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{Re}\,(w_{n,k})}{|w_{n,k}|^2} = -\cos \lambda - \frac{\sin^2 \lambda}{n} \frac{S_n'(\cos \lambda)}{S_n(\cos \lambda)}.$$

où le dernier quotient tend vers $f'(\cos \lambda)/f(\cos \lambda)$ quand $n \to \infty$. On en déduit donc le résultat demandé en faisant $n \to \infty$.

9. a) L'image réciproque du disque $|w| \leq 1 - \epsilon$ est un disque, contenu dans le disque unité, qui ne contient qu'un nombre fini de zéros de f et donc le même nombre de zéros de S_n pour n grand (par Rouché). Donc le nombre de $w_{n,k}$ tels que $|w_{n,k}| \leq 1 - \epsilon$ vaut K pour n assez grand. De plus, $|w_{n,k}|$ est minoré par une constante $a > 0$ car $f(\cos \lambda) \neq 0$. On en déduit que $|S_1| \leq K/a$ qui une constante indépendante de n.
9. b) L'image réciproque du cercle $1 + \epsilon \leq |w|$ est un cercle contenant le disque unité. D'après la question 5), on peut affirmer que, si q_n désigne le nombre de $w_{n,k}$ tels que $|w_{n,k}| \geq 1 + \epsilon$, on a

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{q_n}{n} = 0.$$

Comme chaque terme de S_3 est majoré par $(1 + \epsilon)^{-1}$, on en déduit le résultat.
9. c) L'hypothèse sur les $w_{n,k}$ entraine que chaque terme de S_2 vérifie, pour n grand,

$$\frac{\mathrm{Re}\, w_{n,k}}{|w_{n,k}|^2} < \frac{\cos(\pi - \lambda + \alpha)}{1 + \epsilon} = -\frac{\cos(\lambda - \alpha)}{1 + \epsilon}.$$

De plus, le nombre de termes dans S_2 est $n - q_n - K$ d'où le résultat.

10. Les estimations précédentes montrent que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{Re} w_{n,k}}{|w_{n,k}|^2} < -\frac{\cos(\lambda-\alpha)}{1+\epsilon} < -\cos(\lambda),$$

où la dernière inégalité est vérifiée pour ϵ assez petit. On a donc une contradiction avec le résultat de la question 8).

11. En faisant $\epsilon \to 0$ et $\alpha \to 0$, on obtient qu'il y a un $w_{n,k}$ dans tout voisinage de l'arc défini par $|w| = 1$ et $-\pi + \lambda < \arg w < \pi - \lambda$, et en considérant φ^{-1}, qu'il y a un zéro $z_{n,k}$ dans tout arc de la forme $|z| = 1$ et $-\lambda < \arg z < \lambda$. En faisant $\lambda \to 0$ (ce qui est possible en gardant l'hypothèse $f(\cos\lambda) \neq 0$) on obtient que 1 est dans l'adhérence des $z_{n,k}$.

12. Finalement, tout point du cercle unité est dans l'adhérnce des $z_{n,k}$. Pour le voir, il suffit de remplacer la fonction $f(z)$ par la fonction $f(e^{i\theta}z)$ et utiliser ce qui précède.