Agrégation Mathématiques
Correction du Devoir Surveillé Novembre 2024

Exercices

1. Par contradiction, si ce n'est pas le cas, il existe $D(a, r)$ qui n'est pas dans l'image. Soit $g(z) = 1/(f(z) - a)$. Alors g est entière et $|g(z)| \leq 1/r$ donc g est constante (Liouville).
2. Sinon, il existe un polynôme tel que $|\bar{z} - P(z)| \leq 1/2$ sur $|z| = 1$. Donc $|1 - zP(z)| \leq 1/2$, ce qui contredit le principe du maximum en 0.
3. On écrit Cauchy sur un cercle de rayon r . Comme f est continue dans $\overline{\mathbb{D}}$, donc bornée, par convergence dominée, on a, pour $|z| < r$,

$$2i\pi f(z) = \int_{\mathbb{T}_r} \frac{f(t)}{t - z} dt \rightarrow \int_{\mathbb{T}} \frac{f(t)}{t - z} dt = 0$$

Exercice sur les séries (Agreg Docteurs 2024)

1. – soit on utilise un théorème d'intégration avec la mesure discrète sur les entiers, comme la convergence monotone : pour tout n et $x_k \uparrow 1_-$ quelconque, $0 \leq b_n x_1^n \leq b_n x_2^n \leq \dots$ avec $b_n x_k^n \rightarrow b_n$ quand $k \rightarrow \infty$ donc

$$g(x_k) = \sum b_n x_k^n \rightarrow \sum b_n = +\infty,$$

ou, Fatou, toujours avec la mesure discrète sur les entiers, ce qui donne

$$+\infty = g(1) = \sum_n b_n = \sum_n \liminf_{x \rightarrow 1} b_n x^n \leq \liminf_{x \rightarrow 1} \sum_n b_n x^n \implies \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty,$$

– soit on le fait “à la main” : soit $A > 0$ quelconque (i.e. aussi grand que l'on veut),

$$g(x) \geq \sum_{n=0}^N b_n x^n = \sum_{n=0}^N b_n - \sum_{n=0}^N b_n (1 - x^n),$$

où on peut choisir N assez grand tel que la 1ere somme à droite soit $\geq A$, et x assez proche de 1 pour que $1 - x^N \leq (\sum_{n=0}^N b_n)^{-1}$ ce qui entraîne

$$\sum_{n=0}^N b_n (1 - x^n) \leq \sum_{n=0}^N b_n (1 - x^N) \leq 1 \implies g(x) \geq A - 1.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$ donné. On veut montrer que pour x comme dans l'énoncé, on a

$$\sum a_n x^n > (A - \varepsilon) \sum b_n x^n \iff \sum a_n x^n + \varepsilon \sum b_n x^n > A \sum b_n x^n.$$

Soit N tel que pour $n \geq N$, $a_n \geq A b_n$. Alors, il suffit de prouver que

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n > A \sum_{n=0}^N b_n x^n, \text{ ou plus fort, } \sum_{n=0}^N a_n x^n + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n > A \sum_{n=0}^N b_n.$$

Soit $B = \inf_{x \in [-1,1]} \sum_{n=0}^N a_n x^n$. Il suffit alors de choisir x assez proche de 1 pour que

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n > A \sum_{n=0}^N b_n - B,$$

ce qui est possible car $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$.

3. Soit L la limite. En utilisant la question 2., il est clair que $\liminf_{x \rightarrow 1} f(x)/g(x) \geq L$. En utilisant le même résultat au quotient $-f/g$, on obtient que $\liminf_{x \rightarrow 1} -f(x)/g(x) \geq -L$, soit $\limsup_{x \rightarrow 1} f(x)/g(x) \leq L$, d'où $\lim f(x)/g(x)$ existe et vaut L .

4. On a

$$(1-x) \sum_{n=0}^N s_n x^n = \sum_{n=0}^N s_n x^n - \sum_{n=1}^{N+1} s_{n-1} x^n = \sum_{n=0}^N a_n x^n - s_N x^{N+1}.$$

Il suffit de passer à la limite en montrant que $s_N x^N = \sum_{n=0}^N a_n x^N \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$: soit $\varepsilon > 0$ et soit $N_0 < N$. On a

$$|s_N x^N| \leq \sum_{n=0}^{N_0} |a_n| |x|^N + \sum_{n=N_0+1}^N |a_n| |x|^N \leq \left(\sum_{n=0}^{N_0} |a_n| \right) |x|^N + \sum_{n=N_0+1}^N |a_n| |x|^n,$$

On peut choisir N_0 assez grand pour que le 2ieme terme soit $\leq \varepsilon$ (par convergence absolue de $\sum a_n x^n$), et ensuite, on peut choisir N assez grand pour que le 1er terme soit aussi $\leq \varepsilon$, ce qui prouve le résultat. De même, on a

$$(1-x) \sum_{n=0}^N (n+1) m_n x^n = \sum_{n=0}^N (n+1) m_n x^n - \sum_{n=1}^{N+1} n m_{n-1} x^n = \sum_{n=0}^N s_n x^n - (N+1) m_N x^{N+1},$$

et il faut montrer que $(N+1) m_N x^N = \sum_{n=0}^N s_n x^N \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$: on applique la même technique qu'au dessus, en utilisant cette fois l'absolue convergence de $\sum s_n x^n$.

Finalement, il suffit d'appliquer la question 3. aux séries

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &:= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) m_n x^n = f(x)/(1-x)^2, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n &:= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \end{aligned}$$

où $\lim a_n/b_n = \lim m_n$, pour obtenir que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim m_n$.

Problème 1

1. La fonction $\sin(z)$ a des zéros simples aux points $n\pi$ avec

$$\sin(n\pi + h) = \cos(n\pi) \sin h \simeq \cos(n\pi) h,$$

donc le résidu de f en $n\pi$, $n \neq 0$, est $(n\pi)^{-2p}$.

2. On a

$$\cotg(z) = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1}.$$

3. On développe

$$\begin{aligned}\frac{x}{e^x - 1} &= \frac{x}{x + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3)} = \frac{1}{1 + x/2 + x^2/6 + o(x^2)} \\ &= 1 - x/2 - x^2/6 + o(x^2) + x^2/4 + o(x^2) = 1 - x/2 + x^2/12 + o(x^2),\end{aligned}$$

ce qui donne les valeurs $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$ et $B_2 = 2/12 = 1/6$.

4. On a

$$f(z) = \frac{\cotg(z)}{z^{2p}} = \frac{i}{z^{2p}} + \frac{1}{z^{2p+1}} \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = \frac{i}{z^{2p}} + \frac{1}{z^{2p+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (2iz)^k.$$

Le résidu en 0 est le coefficient de $1/z$ dans ce développement, c'est à dire $(2i)^{2p} B_{2p} / (2p)!$.

5. La formule des résidus dit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{\substack{a_k \text{ poles de } f \\ \text{dans } \gamma}} \text{Res}(f, a_k) = \frac{(2i)^{2p}}{(2p)!} B_{2p} + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{1}{(n\pi)^{2p}} = \frac{(2i)^{2p}}{(2p)!} B_{2p} + \frac{2}{\pi^{2p}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{2p}}.$$

6. La fonction $\cotg z$ est impaire donc il suffit, par exemple, de considérer le coté γ_1 de γ de la forme $iN + x$, $-(N + 1/2)\pi \leq x \leq (N + 1/2)\pi$. Alors

$$\cotg z = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1} = i + \frac{2i}{e^{-2N+2ix} - 1} \rightarrow -i \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

Donc, pour N grand, (et $p \geq 1$),

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_1} \frac{2}{N^{2p}} |dz| = \frac{2}{N^{2p}} (\text{longueur de } \gamma_1) = \frac{2}{N^{2p}} (2N+1)\pi \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

7. Par parité, on se limite au coté γ_2 de γ de la forme $(N + 1/2)\pi + ix$, $-N \leq x \leq N$. Alors

$$\cotg z = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1} = i + \frac{2i}{e^{2i(N+1/2)\pi-2x} - 1} = i + \frac{2i}{-e^{-2x} - 1}$$

donc

$$|\cotg z| \leq 1 + \frac{2}{e^{-2x} + 1} \leq 1 + \frac{2}{e^{-2N} - 1} \leq 1 + 2 = 3.$$

On peut donc majorer l'intégrale comme dans la question précédente.

8. En faisant $N \rightarrow \infty$ dans la formule des résidus, on obtient donc

$$0 = \frac{(2i)^{2p}}{(2p)!} B_{2p} + \frac{2}{\pi^{2p}} \zeta(2p) \iff \zeta(2p) = (-1)^{p+1} 2^{2p-1} \frac{\pi^{2p}}{(2p)!} B_{2p}.$$

9. Pour $p = 1$, la formule donne

$$\zeta(2) = 2 \frac{\pi^2}{2} B_2 = \frac{\pi^2}{6},$$

qui est correcte.

Problème 2

1. La fonction $f'/f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admet une primitive F dans Ω (Théorème 1). Donc

$$(fe^{-F})' = f'e^{-F} - f'e^{-F} = 0 \text{ donc } fe^{-F} = C = e^k,$$

où $C \neq 0$ car f ne s'annule pas et e^{-F} non plus. De plus $C = e^k$ car l'exponentielle est surjective sur $\mathbb{C}^*$. Donc $f = e^{F+k}$ et $g = F + k$ répond à la question.

2. On vient de voir que $f = e^g$ donc $f = (e^{g/n})^n$ et on peut choisir $h = e^{g/n}$.

3. Supposons que f n'est pas la fonction nulle, et supposons que f s'annule en $z_0 \in \Omega$. Par le principe des zéros isolés, il existe un disque fermé $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ dans lequel f n'a pas de zéros autre que z_0 . Soit $m > 0$ le minimum de $|f|$ sur le cercle $C(z_0, r)$. Pour n assez grand, on a $|f - f_n| < m \leq |f|$, donc, avec Rouché, f_n devrait avoir un zéro dans $D(z_0, r)$ ce qui donne une contradiction.

4. Supposons que f ne soit pas constante et pas injective, avec $f(z_1) = f(z_2)$ et $z_1 \neq z_2$ dans Ω . Soit $g(z) := f(z) - f(z_2)$ qui n'est pas nulle et s'annule en z_1 . La suite $g_n(z) := f_n(z) - f_n(z_2)$ converge vers g , et f_n étant injective, ne s'annule pas dans $\Omega \setminus \{z_2\}$. Il suffit donc d'appliquer le résultat de la question 3. dans un ouvert connexe contenant z_1 mais pas z_2 , par exemple un petit disque centré en z_1 , pour obtenir une contradiction.

5. L'existence de g est une conséquence de la question 2. (avec $n = 2$).

6. Soit z et ξ tels que $g(z) = g(\xi)$. Alors, en prenant le carré, $z - q = \xi - q$ donc $z = \xi$ donc g est injective. De même, soit z et ξ tels que $g(z) = -g(\xi)$. Alors, en prenant le carré, $z - q = \xi - q$ donc $z = \xi$ donc $g(z) = 0$ donc $g^2(z) = 0$ donc $z = q$, ce qui contredit $q \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

7. On a que $-g(\Omega)$ est ouvert (théorème de l'image ouverte) et $-g(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus g(\Omega)$ donc il existe un disque $D(\xi, r)$ dans $\mathbb{C} \setminus g(\Omega)$. Alors f est injective car g l'est, et il est clair que son image est dans $\mathbb{D}$. Avec le Théorème 5, il suffit de composer g à gauche avec $\varphi_{f(p)}$ pour obtenir une fonction de $\mathcal{F}$.

8. Par le choix de q , $\varphi_q \circ f$ ne s'annule pas dans Ω donc, avec la question 2., la fonction g existe. De plus l'image de $\varphi_q \circ f$ est dans $\mathbb{D}$, donc celle de g aussi (le carré d'un z avec $|z| \geq 1$ est de module ≥ 1). La fonction f est injective et φ_q est bijective donc g^2 est injective donc g aussi.

9. Pour les fonctions φ_α , on a $\varphi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2$. Donc, en dérivant l'égalité en p , en utilisant que $f(p) = 0$ et $h(p) = 0$, on obtient

$$(\varphi_q \circ f)'(p) = (1 - |q|^2)f'(p) = 2g(p)(1 - |g(p)|^2)h'(p).$$

De plus, $g^2(p) = \varphi_q(0) = -q$ donc

$$(1 - |q|^2)|f'(p)| = 2|q|^{1/2}(1 - |q|)|h'(p)| \iff (1 + |q|)|f'(p)| = 2|q|^{1/2}|h'(p)|,$$

d'où l'on déduit le résultat demandé car

$$(1 + |q|)/(2|q|^{1/2}) > 1 \iff 1 - 2|q|^{1/2} + |q| = (1 - |q|^{1/2})^2 > 0,$$

qui est vraie pour $|q| \neq 1$.

10. Le théorème de Montel entraîne l'existence d'une sous-suite de f_n qui converge sur les compacts de Ω vers une limite $F \in \mathcal{O}(\Omega)$, qui vérifie évidemment $F(p) = 0$. De plus, comme $|f_n| < 1$ pour tout n , l'image de F est dans $\overline{\mathbb{D}}$. On a aussi, par le choix de la suite f_n ,

$$|F'(p)| = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(p)| > 0, \quad (1)$$

où l'inégalité se justifie par le fait que les f_n sont injectives donc $f'_n(p) \neq 0$. En particulier, F n'est pas constante, et donc par le théorème 3, $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. On a aussi avec la question 4. que F est injective, donc, finalement, $F \in \mathcal{F}$.

11. Il suffit de justifier que F est surjective. Si ce n'est pas le cas, il existerait, avec la question 9. une fonction $H \in \mathcal{F}$ avec $|F'(p)| < |H'(p)|$ mais (1) montre que ce n'est pas possible.

12. On vient de prouver l'existence d'une application conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ avec $f(p) = 0$. Comme elle est injective, on a $f'(p) \neq 0$. C'est un nombre complexe avec un certain argument θ . Il suffit donc de composer f avec la rotation $e^{-i\theta}z$ pour obtenir les conditions demandées. Une application conforme avec $f(p) = 0$ et $f'(p) > 0$ est unique : par contradiction, soit g vérifiant les mêmes conditions. Alors $h := g \circ f^{-1}$ est un automorphisme du disque qui fixe 0 avec $h'(0) > 0$. C'est donc une rotation $h(z) = e^{i\theta}z$ et il n'y en a qu'une avec $h'(0) = e^{i\theta} > 0$ (il faut $\theta = 0$).

13. En utilisant, avec le théorème de Riemann, une application conforme $\Omega \rightarrow \mathbb{D}$, la question se ramène à la suivante : soit $u, v \in \mathbb{D}$. Montrer qu'il existe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ conforme avec $f(u) = v$. Par composition, on peut se ramener, sans perte de généralité, au cas $v = 0$. Il suffit donc de choisir, avec les notations de l'énoncé, $f = \varphi_u$.

14. En utilisant, avec le théorème de Riemann, une application conforme $\Omega \rightarrow \mathbb{D}$, la question se ramène à la suivante : soit $u \neq v \in \mathbb{D}$ et $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe, avec $f(u) = u$ et $f(v) = v$. Montrer que $f(z) = z$. Par composition, on peut se ramener, sans perte de généralité, au cas $v = 0$, i.e. $f(0) = 0$ et $f(u) = u$. Le 2) du lemme de Schwarz entraîne alors que $f(z) = z$. Par contre, dans $\mathbb{C}$, on peut avoir une fonction holomorphe qui fixe deux points, sans que ce soit l'identité. Par exemple $f(z) = z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ fixe 0 et 1.

15. Supposons qu'il existe f conforme de $\mathbb{D}^*$ dans $C(1, 2)$. Par le théorème de Riemann sur les singularités artificielles, f , étant bornée au voisinage de 0, elle se prolonge en 0. Notons $\tilde{f}$ ce prolongement défini sur $\mathbb{D}$. Alors, par continuité, $\tilde{f}(0) \in \overline{C(1, 2)}$, donc n'est pas nulle. Comme $\mathbb{D}$ est simplement connexe, il existe g dans $\mathbb{D}$, holomorphe, telle que $g^2(z) = \tilde{f}(z)$, $z \in \mathbb{D}$. En revenant à $C(1, 2)$, l'égalité devient $(g \circ f^{-1})^2(u) = u$ pour $u \in C(1, 2)$, ce qui contredit la non-existence d'une racine carrée dans $C(1, 2)$.

16. Supposons qu'il existe $z_0 \in G$ avec $f'(z_0) = 0$. Alors la fonction $g(z) = f(z) - f(z_0)$ a un zéro de multiplicité $k > 1$ en $z = z_0$. Soit un disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ dans lequel g et f' n'ont pas d'autres zéros. Ce disque existe par le principe des zéros isolés. La fonction

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f'(t)}{f(t) - f(z)} dt$$

vaut k en z_0 , elle prend des valeurs entières (nombre de zéros de la fonction $t \mapsto f(t) - f(z)$ dans $D(z_0, r)$) et elle est continue dans un voisinage V de z_0 (tant que $f(t) - f(z)$ ne s'annule pas sur $\partial D(a, r)$). Donc, pour $z \in V$, $h(z) = k$, c'est à dire que $t \mapsto f(t) - f(z)$

admet k zéros dans $D(z_0, r)$, qui sont en fait dans $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, car $f(z_0) - f(z) \neq 0$. De plus, ce sont des zéros simples car f' ne s'annule pas en ces points. On a donc prouvé que f n'est pas injective.