Université Aix-Marseille **2020-2021**

Agrégation Mathématiques
Correction du Devoir Surveillé Octobre 2020

Problème 1

1) Pour $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, on considère l'approximation obtenue par troncature à l'ordre n de sa série. On a donc

$$\Big\| f - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \Big\|_{\overline{\mathbb{D}}} = \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \Big\|_{\overline{\mathbb{D}}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|f\|_{\overline{D}_r}}{r^k} = \frac{\|f\|_{\overline{D}_r}}{r^n(r-1)},$$

où dans l'inégalité, on a utilisé les inégalités de Cauchy.

2) On en déduit que, pour tout $r < R$, on a $\limsup_n d_n(f, \overline{\mathbb{D}})^{1/n} \leq 1/r$. En faisant $r \to R$, on obtient l'inégalité demandée.

3) A l'extérieur du disque unité, on peut considérer la fonction $p_n(z)/z^n$ qui est analytique en l'infini. En appliquant le principe du maximum dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, on obtient donc

$$|p_n(z)/z^n| \leq \|p_n\|_{\partial\overline{\mathbb{D}}} = \|p_n\|_{\overline{\mathbb{D}}}, \qquad |z| \geq 1,$$

ce qui donne le résultat demandé.

4) On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \|p_n - p_{n-1}\|_{\overline{D}_\rho} &\leq \sum_{n=1}^{N} \|p_n - p_{n-1}\|_{\overline{\mathbb{D}}}\rho^n \leq \sum_{n=1}^{N} (\|p_n - f\|_{\overline{\mathbb{D}}} + \|f - p_{n-1}\|_{\overline{\mathbb{D}}})\rho^n \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(R')^{n-1}}\rho^n = 2\rho \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{\rho}{R'}\Big)^{n-1},\end{aligned}$$

où la dernière somme converge quand $N \to \infty$ car $\rho/R' < 1$. La convergence normale entraine que la suite p_N converge uniformément dans tout compact de D_R (en faisant tendre ρ et R' vers R) vers une fonction analytique F dans D_R.

5) On a $F = f$ sur $\mathbb{D}$ simplement parce que p_N tend vers f dans $\overline{\mathbb{D}}$.

6) On a $\Phi(e^{it}) = \cos(t)$ donc $\Phi(\mathbb{T}) = [-1, 1]$. Il est clair que chaque cercle de rayon $r > 1$ s'envoie bijectivement sur une ellipse dont les points réels sont $\pm(r + 1/r)/2$, de modules plus grands que 1. En faisant varier r, on obtient une bijection de $\{|w| > 1\}$ dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Il est clair aussi que Φ est analytique. Si on résoud l'équation $z = \Phi(w)$, on obtient deux solutions $z \pm \sqrt{z^2 - 1}$, qui sont toutes deux analytiques en dehors de $[-1, 1]$. On peut remarquer que l'une des solutions envoie $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ à l'extérieur du cercle unité $\mathbb{T}$, tandis que l'autre envoie $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ à l'intérieur de $\mathbb{T}$ (ca dépend de la détermination choisie pour la racine carrée).

7) La fonction $(p \circ \Phi)(w)/w^n$ est analytique en dehors du disque unité, donc en appliquant le principe du maximum, on obtient, pour $|w| = R$

$$|(p \circ \Phi)(w)/R^n| \leq \|(p \circ \Phi)(w)\|_{\mathbb{T}} = \|p\|_I.$$

Comme Φ envoie le cercle de rayon R sur l'ellipse E_R, on en déduit $\|p\|_{E_R} \leq R^n \|p\|_I$.

8) Il suffit de reprendre le raisonnement des questions 4) et 5), en remplacant $\mathbb{D}$ par I et D_R par E_R. Je ne détaille pas plus, mais il faudrait le faire dans une copie.

9) On a

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=\rho} \frac{f(\Phi(w))}{w^{n+1}}dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=\rho} \frac{f(\Phi(1/w))}{w^{n+1}}dw \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=1/\rho} w^{n+1} f(\Phi(w))\frac{dw}{w^2} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=\rho} \frac{f(\Phi(w))}{w^{-n+1}}dw = c_{-n}, \end{aligned}$$

où dans la 3ieme égalité on a effectué le changement de variable $w \to 1/w$, et dans la 4ieme, on déforme le contour par analyticité de l'intégrande.

10) L'image par Φ de $\mathbb{T}$ est I, ou de manière équivalente, l'image par Ψ de I est $\mathbb{T}$. La définition de T_n montre alors que $\|T_n\|_I \leq 2^{1-n}$, et l'inégalité est en fait une égalité puisque, par exemple, l'image de 1 est 1 de sorte que $T_n(1) = 2^{1-n}$.

11) On déduit de la question 9) que, pour $1 < |w| < R$, on a $(f \circ \Phi)(w) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(w^n + w^{-n})$, soit, pour z à l'intérieur de E_R,

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\Psi(z)^n + \Psi(z)^{-n}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(z),$$

avec les a_n donnés dans l'énoncé (remarquer que l'égalité est aussi vérifiée sur I par prolongement analytique).

12) On adapte le raisonnement des questions 1) et 2). Ici, on a

$$\Big\| f - \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(z) \Big\|_I = \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k T_k(z) \Big\|_I \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{1-k}|a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{1-k} 2^k \frac{\|f\|_{E_\rho}}{\rho^k} = \frac{2\|f\|_{E_\rho}}{\rho^n(\rho-1)},$$

d'où l'on déduit $\limsup_n d_n(f,I)^{1/n} \leq 1/\rho$. En faisant $\rho \to R$, on obtient l'inégalité du théorème.

Problème 2

1) Si les f_n sont uniformément majorées par une constante M, alors on peut appliquer le lemme de Fatou à la suite $M - f_n$, ce qui donne, en utilisant que $\int M d\mu$ est fini,

$$\int (\liminf_n (-f_n)) d\mu \leq \liminf_n \int (-f_n) d\mu,$$

soit

$$\limsup_n \int f_n d\mu \leq \int \limsup_n f_n d\mu.$$

2) Si $r \neq \pm 1$, le module de $1 - re^{i\theta}$ est majoré et minoré donc il n'y a pas de problème.
Si $r = 1$, $2(1-\cos\theta) \sim \theta^2$ pour θ proche de 0, et $\int \log\theta d\theta$ converge.
Si $r = -1$, $2(1+\cos\theta) = 2(1-\cos\epsilon) \sim \epsilon^2$ avec $\theta = \pi + \epsilon$ et on a encore convergence.

3) On a

$$I(-r) = \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 - 2r\cos\theta + r^2)d\theta = I(r),$$
$$I(1/r) = I(r) - \int \log(r^2)d\theta = I(r) - 4\pi \log r.$$

4) On a, pour $0 < r < 1$, avec $z = re^{i\theta}$, $dz/z = id\theta$,

$$I(r) = 2\int_{C_r} \log|1 - z|\frac{dz}{iz} = -2i\mathrm{Re}\left(\int_{C_r} \log(1 - z)\frac{dz}{z}\right) = 0,$$

où la fonction $\log(1 - z)$ est analytique dans un voisinage du disque de rayon r. Pour $1 < r$, on obtient avec la relation que $I(r) = 4\pi \log r$.

5) Soit $r < 1$. La fonction $\log|1 - re^{i\theta}|$ converge simplement vers $\log|1 - e^{i\theta}|$ lorsque r tend vers 1. De plus, pour θ petit, on a

$$|1 - re^{i\theta}| \geq |r\cos\theta - re^{i\theta}| = r|\sin\theta|$$

donc

$$|\log|1 - re^{i\theta}|| \leq |\log r + \log|\sin\theta|| = -\log r - \log|\sin\theta|,$$

où la fonction à droite est intégrable. Donc, par la convergence dominée, $I(1)$ est la limite des intégrales $I(r)$, c'est à dire 0. Même chose pour $I(-1)$.

6) La fonction $\log g$ est bien définie car g est définie sur le disque $D(0, r + \epsilon)$ qui est simplement connexe et elle ne s'y annule pas. L'égalité est la formule de la moyenne pour la fonction harmonique $\log|g|$.

7) On utilise la formule de la question précédente. Il est clair que $\log|g(0)| = \log|f(0)| - \sum_j \log|a_j|$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|d\theta &= \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \sum_j \int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - a_j|d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \sum_j \int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta}/a_j - 1|d\theta - 2\pi \sum_j \log|a_j| \\
&= \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - 2\pi \sum_j \log|r/a_j| - 2\pi \sum_j \log|a_j| \\
&= \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - 2\pi n \log r,
\end{aligned}$$

où, dans la 3ieme égalité, on a utilisé la valeur de $I(r)$ lorsque $r \geq 1$, trouvée dans les questions 4) et 5) (appliquée avec $r/|a_j| \geq 1$).

8) a) Si $f(0) \neq 0$, la formule (2) montre que l'intégrale à droite est finie. Si $f(0) = 0$ alors il existe $m > 0$ tel que $f(z) = z^m g(z)$ donc $\log|f| = m\log|z| + \log|g|$, et $\log|z|$ est une fonction constante sur $|z| = r$ donc intégrable.

b) Si $f(0) \neq 0$, le terme $-\sum_j \log|a_j| + n\log r$ à gauche de (2) est croissant avec r car il peut s'écrire

$$\sum_j \chi_{[|a_j|, R[}(r)(\log r - \log|a_j|),$$

où $\chi_{[|a_j|,R[}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[a_j, R[$, et la somme est prise sur tous les zéros de f. Si $f(0) = 0$, il faut rajouter un terme $2\pi m \log r$ qui est aussi croissant avec r.

c) Si $f(0) \neq 0$, l'inégalité est vérifiée car pour r proche de zéro, le terme $-\sum_j \log|a_j| + n \log r$ est nul, et ensuite positif. Si $f(0) = 0$, $\log|f(0)| = -\infty$ donc l'inégalité est toujours vérifiée.

9) On utilise l'inégalité de Fatou prouvée dans la question 1). En effet, la mesure $d\theta$ sur $[0, 2\pi]$ est finie, et, par hypothèse, les fonctions $\log|f(re^{i\theta})|$ sont uniformément majorées lorsque $0 < r \leq 1$. Donc,

$$\limsup_{r\to 1} \int \log|f(re^{i\theta})| d\theta \leq \int (\limsup_{r\to 1} \log|f(re^{i\theta})|) d\theta$$

soit

$$\lim_{r\to 1} \int \log|f(re^{i\theta})| d\theta \leq \int \log|f(e^{i\theta})| d\theta,$$

ce qui montre que l'intégrale est croissante à gauche en 1, et que $\log|f|$ est intégrable sur $\mathbb{T}$ puisque son intégrale est majorée par hypothèse et minorée (les intégrales à gauche sont finies par la question 8)a)).

10) Puisqu'une fonction $f \in H^\infty$ admet des limites radiales p.p. sur $\mathbb{T}$ et que $|f|$ est majoré sur $\mathbb{D}$, il en est de même pour la fonction sur $\mathbb{T}$,

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}).$$

Le raisonnement de la question précédente s'applique et $\log|f^*|$ est intégrable sur $\mathbb{T}$. Une fonction non nulle f^* de H^∞ ne peut pas s'annuler sur un ensemble de mesure positive de $\mathbb{T}$ puisque, dans ce cas, $\log|f^*|$ ne serait pas intégrable.