**Université Aix-Marseille** **2021-2022**

## Agrégation Mathématiques
## Correction du Devoir Surveillé Octobre 2021

### Exercice

Pour les deux premières séries, la formule de Hadamard donne, respectivement,

$$\limsup_n |a_n|^{1/n} = \lim_n \left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^{1/n^2} = 1, \qquad \limsup_n |a_n|^{1/n} = \limsup_n 2^{(-1)^n} = 2,$$

donc les rayons de convergence sont 1 et 1/2. Pour la 3ieme série, on a $\limsup_n |a_n|^{1/n} \leq 1$, donc $R \geq 1$. D'autre part, la série $\sum_n \cos(2^n)$ n'est pas convergente car les termes ne tendent pas vers 0. En effet, si c'était le cas, $2\cos^2(2^n) - 1 = \cos(2^{n+1})$ tendrait vers $-1$ ce qui donne une contradiction. Donc $R \leq 1$. Finalement, $R = 1$.

### Problème

**1)** Le membre de droite se réécrit

$$\int_p^{p+1} (\phi(x) + x\phi'(x))dx - p\int_p^{p+1} \phi'(x)dx = [x\phi(x)]_p^{p+1} - p[\phi(x)]_p^{p+1} = \phi(p+1).$$

**2)** En utilisant l'identité précédente avec $\phi(x) = x^{-s}$ sur chaque intervalle $[p, p+1]$, et en sommant, on obtient

$$\sum_{p\geq n+1} p^{-s} = \int_n^\infty \frac{dx}{x^s} - s\int_n^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx = \frac{n^{1-s}}{s-1} - s\int_n^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx.$$

**3)** L'égalité demandée est claire pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$. Il est aussi clair que les 2 premiers termes du membre de droite sont des fonctions analytiques de $s$ (le 2ieme pour $s \neq 1$). Enfin, l'intégrale converge pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, et définit dans ce domaine une fonction analytique de $s$. En effet, sur tout domaine $\mathrm{Re}\,(s) \geq \delta > 0$, on a

$$\left|\frac{1}{x^{s+1}}\right| = \frac{1}{x^{\mathrm{Re}\,(s)+1}} \leq \frac{1}{x^{\delta+1}}, \qquad x \geq n,$$

où le majorant est une fonction intégrable de $x$. Comme la fonction $\zeta(s)$ est aussi analytique dans $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, $s \neq 1$, on en déduit, par unicité du prolongement analytique, que l'égalité est vérifiée dans ce domaine.

**4)** On majore les trois termes de la formule (5) :

$$\left|\sum_{p=1}^n p^{-s}\right| \leq \sum_{p=1}^n p^{-\sigma} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\sigma} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1 + 2(\sqrt{n}-1) \leq 2\sqrt{T},$$

$$\left|\frac{n^{1-s}}{s-1}\right| \leq \frac{n^{1-\sigma}}{T} \leq \frac{\sqrt{T}}{T} = \frac{1}{\sqrt{T}},$$

$$\left| s\int_n^\infty (x-[x])x^{-s-1}dx \right| \le (T^2+4)^{1/2}\int_n^\infty x^{-1-\sigma}dx \le 2T\left[-\frac{1}{\sigma x^\sigma}\right]_n^\infty \le \frac{4T}{\sqrt{n}} \le 8\sqrt{T},$$

ce qui montre la 1ere inégalité. La seconde s'en déduit immédiatement.

**5)** On a

$$\int_1^T \zeta(2+it)dt = \int_1^T \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^{2+it}}dt$$

et

$$\int_1^T \sum_{n\ge 1}\left|\frac{1}{n^{2+it}}\right| dt = \int_1^T \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}dt < \infty.$$

On peut donc permuter l'intégrale et la somme, ce qui donne

$$\int_1^T \zeta(2+it)dt = \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}\int_1^T n^{-it}dt = T + \sum_{n\ge 2}\frac{1}{n^2}\int_1^T e^{-it\log n}dt$$

$$= T + \sum_{n\ge 2}\frac{1}{n^2}\frac{e^{-iT\log n}-e^{-i\log n}}{-i\log n}$$

où la série est majorée en module par

$$2\sum_{n\ge 2}\frac{1}{n^2\log n},$$

qui est une série convergente.

**6)** La fonction $\zeta(s)$ est analytique dans un voisinage du rectangle de sommet $1/2+i$, $2+i$, $2+iT$, $1/2+iT$. L'intégrale de $1/2+i$ à $1/2+iT$ peut donc être remplacée par l'intégrale sur les 3 autres cotés du rectangle. Il suffit donc d'invoquer les estimations (6), (7), et le fait que l'intégrale de $1/2+i$ à $2+i$ est une constante indépendante de $T$.

**7)** Comme $|t|$ est grand, on peut utiliser l'égalité (2). On a

$$|s^{s-1/2}| = |e^{(\sigma-1/2+it)(\log|s|+i\arg s)}| = |s|^{\sigma-1/2}e^{-t\arg s}.$$

Comme $\sigma/t$ est proche de 0, on obtient

$$|s| = (\sigma^2+t^2)^{1/2} = |t|(1+(\sigma/t)^2)^{1/2} \asymp |t|,$$

et

$$\arg s = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sigma}{t}\right) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{t}, \qquad t>0,$$

$$\arg s = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sigma}{t}\right) \sim -\frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{t}, \qquad t<0,$$

d'où

$$|s^{s-1/2}| \asymp |t|^{\sigma-1/2}e^{-|t|\pi/2}.$$

On obtient donc avec (1),

$$|\Gamma(s)| \asymp \sqrt{2\pi}|t|^{\sigma-1/2}e^{-|t|\pi/2}e^{-\sigma} \asymp |t|^{\sigma-1/2}e^{-|t|\pi/2}.$$

**8)** Avec la définition de $W(t,z)$ et le résultat précédent, on obtient

$$t^{1/4}W(t,z) \asymp t^{1/4}t^{-1/4}e^{-\pi t/4}e^{\theta t/2} \asymp e^{-\pi t/4}e^{(\pi/2-\delta)t/2} \asymp e^{-\delta t/2} \asymp 1,$$

où dans la dernière estimation on a utilisé que $\delta t \leq 1$.

**9)** La fonction $\xi$ vérifie $\xi(\overline{s}) = \overline{\xi(s)}$ car tous ses facteurs le vérifient. De plus, sur la droite $1/2+it$, son equation fonctionnelle devient $\xi(1/2+it) = \xi(1/2-it)$. On en déduit que $\xi(1/2+it) = \overline{\xi(1/2+it)}$, c'est à dire que $\xi$ est à valeurs réelles sur la droite $1/2+it$. On a aussi, pour $s = 1/2+it$,

$$s(s-1) = (1/2+it)(-1/2+it) = -t^2 - 1/4 \in \mathbb{R}.$$

En comparant les définitions de $\xi(s)$ et de $Z(t)$, on obtient donc bien que $Z(t)$ est à valeurs réelles.

**10)** La fonction $W(t,z)$ étant positive, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(t,z)|Z(t)|dt \geq \int_{1/(2\delta)}^{1/\delta} W(t,z)|Z(t)|dt \geq C_2\delta^{1/4}\int_{1/(2\delta)}^{1/\delta} |\zeta(1/2+it)|dt$$

$$\geq C_2\delta^{1/4}\left|\int_{1/(2\delta)}^{1/\delta} \zeta(1/2+it)dt\right| = C_2\delta^{1/4}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{2\delta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)\right) \geq C_3\delta^{-3/4},$$

où dans la dernière égalité, on a utilisé (8).

**11)** Soit $s = -k+\epsilon$, $k \in \mathbb{N}$, $\epsilon$ petit. On a, avec (1),

$$\Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)\Gamma(1-s)} \sim \frac{(-1)^k\pi}{\sin(\pi\epsilon)k!} \sim \frac{(-1)^k}{(s+k)k!}.$$

**12)** La fonction $\Gamma(s)z^{-s}$ est méromorphe dans un voisinage du rectangle $R_K$. On suppose que $K$ est différent d'un entier pour éviter que le contour passe par un pole de $\Gamma(s)$. En utilisant le théorème des résidus, et avec le résultat de la question 11), on obtient

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{R_K} \Gamma(s)z^{-s}ds = \sum_{k=0}^{[K]} \frac{(-1)^k}{k!}z^k.$$

En faisant $K \to \infty$ et en utilisant que les intégrales autres que celle de $c-iK$ à $c+iK$ tendent vers 0, on obtient à droite le développement de $e^{-z}$, et la formule demandée.

**13)** Soit $s = c+it$. On a, avec (9), pour $|t|$ grand,

$$|\Gamma(s)z^{-s}| \asymp |t|^{c-1/2}e^{-\pi|t|/2}|z|^{-c}e^{t\arg z} \asymp |t|^{c-1/2}e^{-\pi|t|/2}e^{t\arg z} \asymp \begin{cases} |t|^{c-1/2}e^{t(\arg z-\pi/2)}, & t>0, \\ |t|^{c-1/2}e^{t(\arg z+\pi/2)}, & t<0. \end{cases}$$

Comme $\arg z - \pi/2 < 0$ quand $t > 0$ et $\arg z + \pi/2 > 0$ quand $t < 0$, on en déduit que l'intégrale est absolument convergente en $+\infty$ et $-\infty$.

**14)** On a, pour tout $N \geq 1$,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} n^{-s}\cdot\Gamma(s/2)(\pi z)^{-s/2}\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} n^{-c}\right)\pi^{-c/2}|\Gamma(s/2)z^{-s/2}| \leq \zeta(c)|\Gamma(s/2)z^{-s/2}|,$$

où dans la dernière inégalité, on utilise que $c > 1$. Le 1er facteur est une constante, et le 2ieme est une fonction intégrable de $s$ d'après la question précédente. On en déduit donc, par convergence dominée, que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\zeta(s)\Gamma(s/2)(\pi z)^{-s/2}ds = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geq 1}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s/2)(\pi n^2 z)^{-s/2}ds = 2\sum_{n\geq 1}e^{-\pi n^2 z},$$

où dans la dernière égalité, on utilise (11).

**15)** Soit $R_K$ le rectangle de sommets $c-iK$, $c+iK$, $1/2+iK$, $1/2-iK$ (où $c>1$ et $K>0$). La fonction $\zeta(s)\Gamma(s/2)(\pi z)^{-s/2}$ est analytique au voisinage de $R_K$, hormis le pole de $\zeta(s)$ en 1, de résidu 1. Le théorème des résidus entraine donc que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{R_K}\zeta(s)\Gamma(s/2)(\pi z)^{-s/2}ds = \Gamma(1/2)(\pi z)^{-1/2} = z^{-1/2}.$$

Lorsque $K\to\infty$, les intégrales sur les segments $[c+iK, 1/2+iK]$ et $[1/2-iK, c-iK]$ tendent vers 0 car la longueur des segments est constante, et avec (6) et l'estimation de la question 13),

$$|\zeta(s)\Gamma(s/2)(\pi z)^{-s/2}| \leq a\sqrt{K}K^{c-1/2}e^{-K(\pi/2-\arg z)},$$

où $a$ est une constante multiplicative, et $\pi/2-\arg z<0$. On en déduit donc, en tenant compte de l'orientation, que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\zeta(s)\Gamma(s/2)(\pi z)^{-s/2}ds = -z^{-1/2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\zeta(s)\Gamma(s/2)(\pi z)^{-s/2}ds,$$

ce qui donne la formule demandée avec la question précédente.

**16)** On a $|-z^{-1/2}| = |e^{-i\theta/2}| = 1$. D'autre part, $z = e^{i(\pi/2-\delta)} = i(\cos\delta - i\sin\delta) = \sin\delta + i\cos\delta$ donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}|e^{-\pi n^2 z}| = \sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2\sin\delta} \leq \int_0^{\infty}e^{-\pi x^2\sin\delta}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi\sin\delta}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx \sim C_4\delta^{-1/2},$$

la dernière intégrale étant convergente. On obtient donc bien la majoration demandée pour $\delta$ petit.

**17)** On a, avec $s=1/2+it$, que $W(t,z)Z(t) = \zeta(s)\Gamma(s/2)(\pi z)^{-s/2}(\pi z)^{1/4}$ donc

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}W(t,z)Z(t)dt\right| \leq 2\pi|(\pi z)^{1/4}|C_4\delta^{-1/2} = C_5\delta^{-1/2}.$$

**18)** Si la fonction $t\mapsto\zeta(1/2+it)$ n'avait qu'un nombre fini de zéros, il en serait de même pour $W(t,z)Z(t)$. Supposons que ces zéros, qui sont indépendants de $\delta$, soient dans l'intervalle $[-A,A]$. Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty}W(t,z)|Z(t)|dt - \left|\int_{-\infty}^{\infty}W(t,z)Z(t)dt\right| = \int_{-A}^{A}W(t,z)|Z(t)|dt - \left|\int_{-A}^{A}W(t,z)Z(t)dt\right|,$$

mais le seul facteur dans la fonction $W(t,z)Z(t)$ qui dépend de $\delta$ est $z^{-it/2} = e^{t\theta/2} = e^{t\pi/4}e^{-t\delta/2}$ qui est borné en module par $e^{A\pi/4+A/2}$ dans $[-A,A]$ quand $\delta\to 0$. Les fonctions $W(t,z)Z(t)$ et $W(t,z)|Z(t)|$, qui sont continues, sont donc uniformément bornées dans $[-A,A]$ quand $\delta\to 0$. Cela entraine que la différence de droite reste bornée. Par contre, les estimations (10) et (13) impliquent que la différence de gauche tend vers $+\infty$ quand $\delta\to 0$. On en déduit donc une contradiction.