

Agrégation Mathématiques
Correction du Devoir Surveillé Octobre 2022

Exercice 1

1) La fonction e^z est majorée en module par 1 sur l'axe imaginaire, mais elle n'est pas bornée sur le demi-plan droit.

2) On a

$$|1 + \epsilon(z - a)|^2 = (1 + \epsilon(x - a))^2 + \epsilon^2 y^2,$$

ce qui montre la 1ere inégalité car $\epsilon > 0$ et $x - a \geq 0$, et montre aussi la 2ieme.

3) Sur les bords verticaux du rectangle on a $|\varphi_\epsilon f| \leq M$ et sur les bords horizontaux on a $|\varphi_\epsilon f| \leq C/(\epsilon C/M\epsilon) = M$ donc en appliquant le principe du maximum sur le rectangle on obtient que $|\varphi_\epsilon f| \leq M$ soit $|f| \leq M|1 + \epsilon(z - a)|$. Soit un rectangle R de hauteur fixé. En faisant tendre ϵ vers 0, ce rectangle va être inclus dans celui de hauteur $C/(M\epsilon)$ tandis que le majorant tend vers M . On en déduit que $|f|$ est majoré par M dans R . Comme c'est valable pour tout rectangle R , on obtient le principe du maximum énoncé dans la bande Ω .

4) On a

$$|e^{-Az^B}| = e^{-A\operatorname{Re}(z^B)} = e^{-A\operatorname{Re}(\exp(B \log z))} = e^{-AR^B \cos(B\theta)}.$$

5) On a

$$|f_1(z)| \leq C e^{TR} e^{-AR^B \cos(B\theta)}$$

où le majorant tend vers 0 quand $R \rightarrow \infty$ car $B > 1$ et $\cos(B\theta) > 0$.

6) L'inégalité demandée est vérifiée pour $|z|$ grand. Pour $|z|$ borné, on utilise le principe du maximum classique. Pour cela, il suffit de vérifier l'inégalité sur le bord de D . Pour $|\theta| = \psi$, on a

$$|f_1(z)| \leq M e^{-AR^B \cos(B\psi)} \leq M$$

car $B\psi < \pi/2$.

7) En faisant $A \rightarrow 0$, on a $f_1(z) \rightarrow f(z)$ en chaque $z \in D$. Donc, l'inégalité $|f(z)| \leq M$ est aussi vérifiée sur $\overline{D}$. Finalement, pour obtenir le cas d'un secteur quelconque (pas forcément symétrique par rapport à l'axe réel) il suffit de faire un changement de variable du type $z \rightarrow e^{i\varphi}z$ et de remarquer que la propriété de croissance exponentielle est invariante par rotation de la variable pour se ramener au cas symétrique.

Exercice 2

1) Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n(f)| \leq \int_0^{2\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} = \|f\|_1.$$

La 2ieme inégalité est l'inégalité de Bessel.

2) Il suffit de montrer que chaque terme de la somme est une fonction entière. C'est bien sûr le cas de $|a_n|^{pz}$. Pour l'intégrale, à cause de la convention, on peut écarter les valeurs de t telle que $f(t) = 0$ (dans ce cas l'intégrande est nulle). En dehors de ces valeurs, comme f est en escalier, il existe deux constantes $C \geq c > 0$ telle que $C \geq |f(t)| \geq c$. On a donc

$$|\log |f(t)|| \leq C_1 := \max(|\log c|, |\log C|). \quad (1)$$

Pour $z = x + iy$, $|x| < M$, on obtient

$$\left| |f(t)|^{pz} \frac{f(t)}{|f(t)|} e^{-int} \right| = |f(t)|^{px} \leq e^{pC_1|x|} \leq e^{pC_1M},$$

où le majorant est une constante donc une fonction intégrable en t sur $(0, 2\pi)$. De plus, $|f(t)|^{pz}$ est une fonction entière de z pour chaque t donc l'intégrale est une fonction analytique en z dans la bande verticale $|x| < M$. Comme M est quelconque, on a finalement que g est une fonction entière.

3) Pour $x = 1$, on a

$$|g(z)| \leq \sum_{n=-N}^N |a_n|^p \int_0^{2\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=-N}^N |a_n|^p = 1.$$

Pour $x = 1/2$, on a

$$|g(z)| \leq \sum_{n=-N}^N |a_n|^{p/2} |c_n(\varphi)| \leq \left(\sum_{n=-N}^N |a_n|^p \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-N}^N |c_n(\varphi)|^2 \right)^{1/2} \leq \|\varphi\|_2 = \|f\|_p^{p/2} = 1.$$

4) Montrons que g est bornée dans la bande $1/2 \leq x \leq 1$. Pour cela, il suffit de borner chaque terme de la somme (qui est finie). Un terme générique est majoré par

$$|a_n|^{px} \int_0^{2\pi} |f(t)|^{px} \frac{dt}{2\pi} \leq e^{p|\log |a_n||} e^{p|\log |f(t)||} \leq e^{p|\log |a_n||} e^{pC_1},$$

où on a utilisé (1). On peut donc appliquer la question précédente et le Théorème 1.

5) D'après ce qui précède, on a $|g(1/p)| \leq 1$. La définition de g montre que

$$g(1/p) = \sum_{n=-N}^N a_n \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=-N}^N a_n c_n(f).$$

En prenant le sup sur toutes les suites $(a_n)_{n=-N}^N$ telles que $\|(a_n)\|_p = 1$, on obtient, avec l'égalité (1) de l'énoncé, que $\|(c_n(f))_{n=-N}^N\|_q \leq 1$. En faisant tendre N vers l'infini, on a que $\|(c(f))\|_q \leq 1$. Finalement, pour une fonction en escalier f de norme $\|f\|_p > 0$ quelconque, on déduit, en appliquant ce qui précède à $f/\|f\|_p$ que $\|(c(f))\|_q \leq \|f\|_p$.

6) Il suffit de considérer une suite de fonctions en escalier f_k qui tend vers f dans L^p , et donc aussi dans L^1 . Alors $\|f_k\|_p \rightarrow \|f\|_p$ et $c_n(f_k) \rightarrow c_n(f)$ pour chaque n . On en déduit dans le cas d'une suite finie de coefficients de Fourier que $\|(c_n(f))_{n=-N}^N\|_q \leq \|f\|_p$. Comme l'inégalité est vérifiée pour tout N , on en déduit aussi que $\|(c(f))\|_q \leq \|f\|_p$.

Exercice 3

1) Comme f est à support dans $[-T, T]$, on a $f \in L^2(-T, T) \subset L^1(-T, T)$, et donc

$$\mathcal{F}f(z) = \int_{-T}^T f(t)e^{-izt} dt.$$

Soit $z = x + iy$ avec $y < M$. Alors $|f(t)e^{-izt}| \leq |f(t)|e^{MT} \in L^1$ ce qui montre que $\mathcal{F}f$ est analytique dans $\text{Im } z < M$. Comme M est quelconque, f est entière. De plus,

$$|\mathcal{F}f(z)| \leq e^{|\text{Im}(z)|T} \int_{-T}^T |f(t)| dt \leq e^{|z|T} \int_{-T}^T |f(t)| dt$$

ce qui montre que $\mathcal{F}f$ est de type exponentiel T .

2) Comme $\mathcal{F}f$ est de type exponentiel T , il existe une constante C telle que $|\mathcal{F}f(z)| \leq Ce^{T|z|}$ donc

$$|\mathcal{F}f(z+t)| \leq (Ce^{T|z|})e^{Tt} \in L^1(-1/2, 1/2)$$

ce qui montre que h est analytique dans tout disque $|z| \leq M$, et donc entière. De plus

$$|h(z)| \leq \left(C \int_{-1/2}^{1/2} e^{Tt} dt \right) e^{T|z|}$$

donc h est de type exponentiel T . On a aussi, avec Cauchy-Schwarz dans l'inégalité, et Fubini dans la 2ieme égalité,

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &= \int_{z=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{F}f(z+t) dt \right|^2 dz \leq \int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} |\mathcal{F}f(z+t)|^2 dt dz \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \|\mathcal{F}f\|_2^2 dt = \|\mathcal{F}f\|_2^2. \end{aligned}$$

3) La fonction g est de type exponentiel car h l'est et $|e^{iBz}| \leq e^{B|z|}$. Elle est bornée sur $\mathbb{R}$ car, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |h(x)| \leq \int_{-1/2}^{1/2} |\mathcal{F}f(x+t)| dt = \int_{x-1/2}^{x+1/2} |\mathcal{F}f(t)| dt \\ &\leq \left(\int_{x-1/2}^{x+1/2} |\mathcal{F}f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \|\mathcal{F}f\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

Sur l'axe imaginaire positif, on a, pour $y \geq 0$,

$$|g(iy)| = e^{-By} |h(iy)| \leq Ce^{-By} e^{Ty} \leq C,$$

puisque $B > T$.

4) On applique Phragmen-Lindelöf 2 sur les 2 quadrants $0 \leq \theta \leq \pi/2$ et $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ (d'ouvertures $< \pi$) pour obtenir que $|g| \leq C$ sur le demi-plan supérieur. Donc

$$|h(Re^{i\theta})| \leq |e^{-iBRe^{i\theta}}| |g(Re^{i\theta})| \leq Ce^{BR \sin \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

5) Comme la seule singularité de la fonction est un pôle en $-i/A$, qui n'est pas dans le demi-cercle, on a que son intégrale sur le demi-cercle est nulle, en particulier,

$$\left| \int_{-R}^R \frac{e^{ixz} h(z)}{1 - Aiz} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{ixRe^{i\theta}} h(Re^{i\theta})}{1 - AiRe^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{R}{AR} \int_0^\pi e^{(B-x)R \sin \theta} d\theta$$

où, avec $B - x < 0$ et la convergence dominée, on voit que la dernière intégrale tend vers 0 quand $R \rightarrow \infty$.

6) Le résultat de la question précédente dit précisément que la transformée de Fourier inverse de la fonction $(1 - Aiz)^{-1}h(z)$ s'annule sur (B, ∞) et donc, en faisant tendre B vers T , sur (T, ∞) . Maintenant, montrons que $(1 - Aiz)^{-1}h(z)$ tend vers $h(z)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ quand A tend vers 0. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{h(x)}{1 - Aix} - h(x) \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{A^2 x^2}{1 + A^2 x^2} |h(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |h(x)|^2 dx < \infty,$$

donc, par convergence dominée, la limite quand $A \rightarrow 0$ est nulle. La transformée de Fourier étant une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$, on en déduit que $\mathcal{F}^{-1}((1 - Aiz)^{-1}h(z))$ tend vers $\mathcal{F}^{-1}h(z)$ dans $L^2(\mathbb{R})$. La propriété (2) de l'énoncé montre donc que $\mathcal{F}^{-1}h(x) = 0$ presque partout pour $x > T$.

7) Soit $F_R(t)$ la 2ième intégrale et $F(t)$ sa limite dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $R \rightarrow \infty$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} |F(t) - F_R(t)|^2 dt \rightarrow 0 \implies \int_{-1/2}^{1/2} |F(t) - F_R(t)|^2 dt \rightarrow 0 \implies \int_{-1/2}^{1/2} |F(t) - F_R(t)| dt \rightarrow 0$$

donc

$$\int_{-1/2}^{1/2} F_R(t) dt \rightarrow \int_{-1/2}^{1/2} F(t) dt.$$

8) La permutation des 2 intégrales peut se justifier par Fubini car

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-R}^R |f(y)e^{-iy(x+t)}| dy dt = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-R}^R |f(y)| dy dt = \int_{-R}^R |f(y)| dy,$$

où la dernière intégrale est finie puisque $f \in L^2(-R, R) \subset L^1(-R, R)$.

9) On obtient donc,

$$h(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \int_{-1/2}^{1/2} f(y)e^{-iy(x+t)} dt dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f(y)e^{-iyx} \frac{\sin(y/2)}{y/2} dy,$$

ce qui montre que

$$\mathcal{F}^{-1}h(x) = f(x) \frac{\sin(x/2)}{x/2}.$$

On a vu que $\mathcal{F}^{-1}h$ s'annule pour $x > T$. Comme la fonction $\sin(x/2)$ s'annule sur un ensemble de mesure nulle, on en déduit que f s'annule presque partout pour $x > T$. Finalement, en appliquant ce que l'on vient de prouver à la fonction $\tilde{f}(x) = f(-x)$ pour laquelle $\mathcal{F}\tilde{f}(x) = \mathcal{F}f(-x)$ s'étend aussi de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ en une fonction entière de type exponentiel T , on obtient que $\tilde{f}$ s'annule pour $x > T$ p.p. donc f s'annule pour $x < -T$ p.p., ce qui achève la preuve de l'implication inverse du théorème.