

Agrégation Mathématiques
Correction du Devoir Surveillé Octobre 2023

Partie I

I-1) La 1^{ere} égalité est une simple conséquence de la formule (2) et du fait que la fonction $\log$ est continue. La 2^{ieme} égalité s'obtient en dérivant la 1^{ere}. Pour justifier la dérivation terme à terme de la 1^{ere} série, il faut vérifier que la 2^{ieme} série converge uniformément sur tout intervalle borné de la forme $[a, b]$, $a > 1$. Sur un tel intervalle, on a

$$\frac{\log p_n}{p_n^\sigma - 1} \leq \frac{\log p_n}{p_n^a - 1} \leq \frac{1}{p_n^{(1+a)/2}}$$

où la 2^{ieme} majoration est valable pour n assez grand. Comme le 2^{ieme} majorant est le terme général d'une série convergente (car $(1+a)/2 > 1$), cela prouve la convergence normale, donc uniforme, de la série sur $[a, b]$.

I-2) Pour $s = \sigma + it$ avec $\sigma \geq a > 1$, on a

$$\left| \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right| = \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \leq \frac{\log(n)}{n^\sigma} \leq \frac{\log(n)}{n^a} \leq \frac{1}{n^{(1+a)/2}},$$

où la dernière inégalité est vérifiée pour n assez grand. Comme c'est le terme général d'une série convergente, la convergence de $\Phi(s)$ est normale, donc uniforme, sur les compacts de $\mathbf{H}_1$, ce qui entraîne que $\Phi(s)$ est bien définie et analytique dans $\mathbf{H}_1$.

I-3) En utilisant la définition de $\Lambda(n)$, et le fait que tous les termes sont positifs (ce qui permet de permuter et regrouper les termes de la série), la fonction $\Phi(\sigma)$ peut se réécrire

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(p_n)}{p_n^{k\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \log(p_n) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n^\sigma} \right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \log(p_n) \left(\frac{1}{1 - p_n^{-\sigma}} - 1 \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(p_n)}{p_n^\sigma - 1} = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}. \end{aligned}$$

Partie II

II-1a) Soit $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$. On a, puisque $p_n^{-\sigma} < 1$, $n > 0$,

$$\log \zeta(\sigma) = - \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - p_n^{-\sigma}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_n^{-k\sigma}}{k}, \quad (1)$$

et d'autre part

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} |Z(ks)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-k\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k^{-1} p_n^{-k\sigma}. \quad (2)$$

II-1b) Chaque fonction $s \mapsto (kp_n^{ks})^{-1}$ est analytique dans $\mathbf{H}_1$, et si K est un compact dans H_σ , $\sigma > 1$, on a

$$\sup_{s \in K} |kp_n^{ks}|^{-1} \leq (kp_n^{k\sigma})^{-1} \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k^{-1} p_n^{-k\sigma} < \infty,$$

d'où la convergence normale, donc uniforme de la série dans K , ce qui entraîne que la limite est analytique dans $\mathbf{H}_\sigma$, donc aussi dans $\mathbf{H}_1$.

II-1c) Par le principe des zéros isolés, il suffit de prouver l'égalité pour $\sigma > 1$. Dans ce cas, l'égalité résulte de (1) et du fait que, pour $s = \sigma \in \mathbb{R}$, (2) devient

$$L(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} Z(k\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-k\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k^{-1} p_n^{-k\sigma}.$$

II-1d) Une exponentielle n'a pas de zéros.

II-1e) L'égalité pour $\sigma > 1$ a déjà été prouvée. Comme $\zeta(s)$ est sans zéros dans $\mathbf{H}_1$, le quotient ζ'/ζ y est bien défini, et l'égalité peut s'étendre de $]1, \infty[$ à $\mathbf{H}_1$.

II-2a) On a $v_n(s) = n^{-s} - \int_n^{n+1} x^{-s} dx$. La série de terme général (n^{-s}) est absolument convergente par la règle de Riemann ($|n^{-s}| = n^{-\operatorname{Re}(s)}$); par ailleurs, la série de terme général $\int_n^{n+1} x^{-s} dx$ est de somme partielle d'ordre n égale à $\int_1^{n+1} x^{-s} dx = \frac{1}{s-1} - \frac{(n+1)^{-s}}{s-1}$ qui tend vers $\frac{1}{s-1}$. D'où le résultat par différence.

II-2b) On a

$$\begin{aligned} s \int_n^{n+1} [x] x^{-1-s} dx &= (n+1)s \left[\frac{x^{-s}}{-s} \right]_n^{n+1} = (n+1)(n^{-s} - (n+1)^{-s}) \\ &= n^{-s} + n^{-s+1} - (n+1)^{-s+1} \end{aligned}$$

et

$$s \int_n^{n+1} x^{-s} dx = \frac{s}{-s+1} ((n+1)^{-s+1} - n^{-s+1})$$

et en faisant la différence, on obtient bien $v_n(s)$. La fonction donnée est majorée par x^{-1-s} qui est bien intégrable en l'infini lorsque $s > 0$. L'expression de $\zeta(s)$ est une simple conséquence de ce qui précède.

II-2c) Il suffit de justifier que la fonction

$$s \mapsto \int_1^{+\infty} ([x] - x) x^{-1-s} dx$$

est analytique pour $\operatorname{Re}(s) > 0$, mais par le théorème du cours, c'est vrai puisque $s \mapsto x^{-1-s}$ est analytique et, pour $\operatorname{Re}(s) > \sigma > 0$,

$$|([x] - x) x^{-1-s}| \leq x^{-1-\sigma},$$

qui est intégrable sur $[1, \infty[$.

II-3a) On a vu que, pour $s = \sigma + it \in \mathbf{H}_1$, on a

$$\zeta(s) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{kp_n^{ks}} \quad \text{donc} \quad |\zeta(s)| = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(p_n^{-ikt})}{kp_n^{k\sigma}} = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(kt \log p_n)}{kp_n^{k\sigma}}.$$

En appliquant la 2ieme égalité sur les 4 facteurs, on obtient l'identité demandée. L'inégalité vient du fait que q est une fonction positive.

II-3b) Avec l'hypothèse, on a que

$$\zeta'(1+it_0) = \lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \frac{\zeta(\sigma+it_0)}{\sigma-1}$$

et de plus $\lim_{\sigma \rightarrow 1}(\sigma-1)\zeta(\sigma) = 1$ (le résidu de ζ au pole simple $s = 1$ vaut 1) d'où le résultat. Alors, quand $\sigma \rightarrow 1^+$, la limite de

$$\zeta(\sigma)^5 |\zeta(\sigma+it_0)|^8 |\zeta(\sigma+2it_0)|^4 |\zeta(\sigma+3it_0)|, \quad t \neq 0,$$

existe et vaut

$$|\zeta'(1+it_0)|^5 |\zeta(1+it_0)|^3 |\zeta(1+2it_0)|^4 |\zeta(1+3it_0)| = 0,$$

(les 1er, 3ieme et 4ieme facteurs sont des nombres finis), ce qui contredit la minoration par 1 obtenue précédemment pour $\sigma > 1$.

II-4a) Avec l'identité, on obtient pour $\sigma > 1$,

$$|\zeta(\sigma+it)| \leq 1 + |s| \int_1^\infty x^{-1-\sigma} dx = 1 + \frac{|s|}{\sigma} = 1 + \sqrt{1+t^2} \leq 2 + |t| \leq 3|t|,$$

et, par continuité, l'inégalité est aussi vérifiée pour $\sigma = 1$ et $|t| \geq 1$.

II-4b) En dérivant l'identité, (et justifiant la dérivée sous l'intégrale), on obtient

$$\zeta'(s) = \frac{-1}{(s-1)^2} + \int_1^{+\infty} ([x] - x)x^{-1-s} dx - s \int_1^{+\infty} ([x] - x)(\log x)x^{-1-s} dx$$

donc, avec une IPP (car l'intégrale converge),

$$\begin{aligned} |\zeta'(s)| &\leq 1 + \frac{1}{\sigma} + |s| \int_1^\infty (\log x)x^{-1-\sigma} dx = 1 + \frac{1}{\sigma} + |s| \left(\left[-\frac{\log x}{\sigma x^\sigma} \right]_1^\infty + \frac{1}{\sigma} \int_1^\infty x^{-\sigma-1} dx \right) \\ &\leq 2 + \frac{|s|}{\sigma^2} \leq 2 + \frac{|s|}{\sigma} \leq 3 + |t| \leq 4|t|. \end{aligned}$$

II-5a) On l'obtient par le théorème fondamental du calcul intégral.

II-5b) La 1ere inégalité est évidente. Pour la 2ieme, on a, par décroissance de $x^{-1-\sigma}$,

$$\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^{1+\sigma}} \leq \sum_{n \geq 3} \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = \left[\frac{-1}{\sigma x^\sigma} \right]_2^\infty = \frac{1}{\sigma 2^\sigma}.$$

On a

$$|\zeta(\sigma+1+it) - 1| = \left| \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^{\sigma+1+it}} \right| \leq \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^{\sigma+1}} \leq 2^{-1-\sigma} + \sigma^{-1} 2^{-\sigma} \leq \frac{3}{4}$$

d'où

$$|\zeta(\sigma+1+it)| \geq 1/4.$$

II-5c) Si on élève l'inégalité demandée à la puissance 4, on doit prouver que

$$|\zeta(x+it)|^{-8} \leq 2^4 \cdot 3^{11} |t|^5 (x-1)^{-5}.$$

L'inégalité du II-3a puis celle du II-4a donnent

$$|\zeta(x+it)|^{-8} \leq \zeta(x)^5 |\zeta(x+2it)|^4 |\zeta(x+3it)| \leq \zeta(x)^5 (6|t|)^4 9|t| = 2^4 3^6 |t|^5 \zeta(x)^5,$$

et il ne reste plus qu'à prouver que, pour $x \in]1, 3]$,

$$\zeta(x) \leq 3/(x-1),$$

ce qui s'obtient par une comparaison série-intégrale.

II-5d) En utilisant (8) et (9) dans (7), on obtient

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma+it)|^{-1} &\leq 4 + 2^3 3^{11/4} |t|^{9/4} \int_{\sigma}^{\sigma+1} \frac{dx}{(x-1)^{5/4}} = 4 + 2^5 3^{11/4} |t|^{9/4} ((\sigma-1)^{-1/4} - \sigma^{-1/4}) \\ &\leq 4 + 2^5 3^{11/4} |t|^{9/4} (\sigma-1)^{-1/4} \leq 2^6 3^{11/4} |t|^{9/4} (\sigma-1)^{-1/4} \end{aligned}$$

car $4 \leq \min_{t,\sigma} 2^5 3^{11/4} |t|^{9/4} (\sigma-1)^{-1/4} = 2^5 3^{11/4}$.

II-5e) Voir le "corrigé" dans le rapport de l'agreg de 2022.

II-6) On a vu dans la question II-1e) que $\Phi(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$, $s \in \mathbf{H}_1$, et que $\zeta(s)$ est analytique dans $\mathbf{H}_0 \setminus \{1\}$, et de plus ne s'annule pas sur $\{\operatorname{Re}(s) = 1\} \setminus \{1\}$. La fonction Φ peut donc se prolonger de manière continue à $\{s \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}(s) \geq 1 \text{ et } |\operatorname{Im}(s)| \geq 1\}$. Pour $\sigma \in [1, 2]$ et tout réel t tel que $|t| \geq 1$ on a, avec les questions précédentes,

$$|\Phi(\sigma+it)| = \left| \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} \right| \leq (4|t|)M|t|^{11/2} = 4M|t|^{13/2}.$$

Partie III

III-1) On a

$$0 < e^{-nx} \Lambda(n) \leq e^{-nx} \log(n) \quad \text{et} \quad \frac{e^{-(n+1)x} \log(n+1)}{e^{-nx} \log(n)} = \frac{e^{-x} \log(n+1)}{\log(n)} \rightarrow e^{-x} < 1,$$

donc, par le critère de d'Alembert, la série converge. Sur $]a, b[\subset \mathbb{R}_+^*$, la série converge normalement car $e^{-nx} \Lambda(n) \leq e^{-na} \log(n)$ qui sont les termes d'une série convergente. La convergence est donc uniforme, et la limite est une fonction continue sur $]a, b[$, donc aussi sur $\mathbb{R}_+^*$.

III-2) On montre que l'intégrale est absolument convergente. On a, avec $s = \sigma + it \in \mathbf{H}_1$,

$$\int_0^\infty |\varphi(x) x^{s-1}| dx = \int_0^\infty \varphi(x) x^{\sigma-1} dx.$$

Les termes de la série $\varphi(x)$ sont positifs, ainsi que $x^{\sigma-1}$. En permutant l'intégrale et la série, on obtient

$$\sum_{n=1}^\infty \Lambda(n) \int_0^\infty e^{-nx} x^{\sigma-1} dx = \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n) n^{-\sigma} \int_0^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt = \Phi(\sigma) \Gamma(\sigma),$$

avec $\Phi(\sigma)$ et $\Gamma(\sigma)$ qui sont bien définis lorsque $\sigma > 1$ (d'après I-2) pour $\Phi(\sigma)$). Puisque la quantité obtenue est finie, on peut, avec Fubini, permuter l'intégrale et la série lorsque $s \in \mathbf{H}_1$, ce qui donne $\mathcal{M}\varphi(s) = \Phi(s)\Gamma(s)$, et montre aussi que $\mathcal{M}\varphi$ est analytique dans $\mathbf{H}_1$, puisque Φ et Γ le sont.

III-3) D'après la question précédente, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{M}\varphi(\sigma + it)| dt = \int_{\mathbb{R}} |\Phi(\sigma + it)\Gamma(\sigma + it)| dt$$

et, pour $|t| \geq 1$, $\sigma \in]1, 2]$,

$$|\Phi(\sigma + it)\Gamma(\sigma + it)| \leq 4M|t|^{13/2} \frac{C_{k,2}}{(1 + |t|)^k}.$$

Il suffit donc de choisir k assez grand pour conclure que l'intégrale est convergente.

III-4) C'est la formule d'inversion de la transformée de Mellin, où on a utilisé l'expression de Φ obtenue dans II-1e).

III-5a) On a $\zeta(1 + it) \neq 0$ pour $t \neq 0$, donc le seul problème est en 1. Dans un voisinage de 1, on peut écrire

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + f(s), \quad \zeta'(s) = \frac{-1}{(s-1)^2} + f'(s),$$

avec f analytique. Donc

$$h(s) = \frac{f(s) + (s-1)f'(s)}{1 + (s-1)f(s)},$$

qui est bien continue en 1.

III-5b) Comme $h(s)$ est continue sur $\operatorname{Re}(s) \geq 1$, il suffit de prouver la majoration en dehors d'un voisinage V de 1. En dehors de ce voisinage, on peut supposer, par exemple, que $|s-1| \geq 1$, donc il suffit de majorer $|\zeta'/\zeta|$. Si $\operatorname{Re}(s) > 1$ alors $|\zeta'/\zeta| = |\Phi|$ et on a la majoration de la question II-6. Par continuité, elle est aussi valable pour $\operatorname{Re}(s) = 1$, en dehors de V .

III-5c) Il suffit d'utiliser la majoration précédente et la majoration de la fonction Γ donnée au début de l'énoncé, avec $k = 16/2 = 8$. La fonction donnée est intégrable car $(1 + |t|)^{-3/2}$ l'est et

$$|\Gamma(\sigma + it)h(\sigma + it)x^{-(\sigma+it)}| = |\Gamma(\sigma + it)h(\sigma + it)|x^{-\sigma},$$

où le dernier facteur ne dépend pas de t .

III-5d) Cela provient de l'identité dans III-4) et du fait que, pour $1 < \sigma \leq 2$,

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \Gamma(\sigma + it) \frac{x^{-(\sigma-1+it)}}{\sigma-1+it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \Gamma(\sigma-1+it) x^{-(\sigma-1+it)} dt,$$

qui est l'inversion de $\Gamma(s) = \mathcal{M}(e^{-x})$, (noter que $e^{-x}x^{\sigma-2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\sigma \in]1, 2]$).

III-5e) Il suffit de montrer qu'on peut passer à la limite $\sigma \rightarrow 1$ dans l'intégrale de la formule précédente. C'est une conséquence de la convergence dominée que l'on peut appliquer, compte tenu de la majoration de la question III-5c).

III-6) Il suffit d'appliquer le théorème de Riemann-Lebesgue pour la transformée de Fourier de la fonction $\Gamma(1+it)h(1+it)$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

III-7) On déduit que la question précédente que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\varphi(x) = 1$. On applique alors le théorème avec $D(\sigma) = \varphi(\sigma)$, c'est à dire $a_n = \Lambda(n)$ et $\lambda_n = n$. Les hypothèses sont vérifiées car on a vu que la série $\varphi(\sigma)$ converge pour $\sigma > 0$, et de plus,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(p\sigma)}{\varphi(\sigma)} = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{p\sigma\varphi(p\sigma)}{p\sigma\varphi(\sigma)} = \frac{1}{p}.$$

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(1/n)}{n} = 1,$$

et la conclusion du théorème donne le résultat demandé.