Correction des Exercices du 13/11

Exercice 1. 1. On calcule la dérivée de f:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \geq 0 \quad \text{pour} \quad x \geq e,$$

donc f est croissante sur $[e, +\infty[$.
2. On déduit de la croissance de f sur $[e, +\infty[$ que

$$\int_{k-1}^{k} \frac{x}{\ln x} dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{k}{\ln k} dx = \frac{k}{\ln k}, \quad k \geq 4,$$

et de même

$$\frac{k}{\ln k} = \int_{k}^{k+1} \frac{k}{\ln k} dx \leq \int_{k}^{k+1} \frac{x}{\ln x} dx, \quad k \geq 3,$$

donc

$$\int_{k-1}^{k} \frac{x}{\ln x} dx \leq \frac{k}{\ln k} \leq \int_{k}^{k+1} \frac{x}{\ln x} dx, \quad k \geq 4.$$

En sommant sur k et en utilisant Chasles, on obtient

$$\int_{n}^{2n} \frac{x}{\ln x} dx \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{\ln(k)} \leq \int_{n+1}^{2n+1} \frac{x}{\ln x} dx, \quad n \geq 3,$$

mais dans l'intégrale de gauche, $1/\ln x \geq 1/\ln(2n)$ et dans l'intégrale de droite, $1/\ln x \leq 1/\ln(n+1)$, ce qui donne le résultat demandé.
3. En estimant les deux intégrales, on obtient

$$\frac{3n^2}{2\ln(2n)} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{\ln(k)} \leq \frac{3n^2 + 2n}{2\ln(n+1)}$$

et en divisant par le terme de gauche,

$$1 \leq \frac{2\ln(2n)}{3n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{\ln(k)} \leq \frac{3n^2 + 2n}{2\ln(n+1)} \frac{2\ln(2n)}{3n^2} = \frac{(1 + 2/(3n))\ln(2n)}{\ln(n+1)}.$$

Comme la fraction à droite tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, on en déduit (par le théorème des gendarmes) qu'un équivalent de la somme lorsque n tend vers l'infini est

$$\frac{3n^2}{2\ln(2n)} \quad \text{qui est lui-même équivalent à l'expression plus simple} \quad \frac{3n^2}{2\ln(n)}.$$

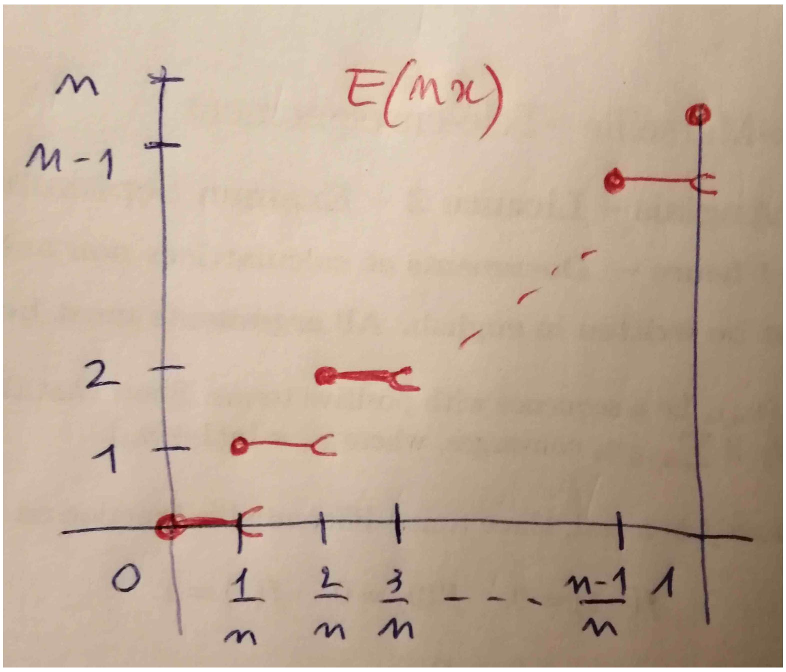
Exercice 2. Lorsque x varie entre 0 et 1, nx varie entre 0 et n. Soit k un nombre entier entre 0 et n. On a que

$$k \leq nx < k+1 \iff \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}.$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
&E(nx) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \le x < 1/n, \quad (k=0),\\
&E(nx) = 1 \quad \text{si} \quad 1/n \le x < 2/n, \quad (k=1),\\
&\qquad \vdots\\
&E(nx) = n-1 \quad \text{si} \quad (n-1)/n \le x < 1, \quad (k=n-1),
\end{aligned}
$$

et $E(nx) = n$ si $x = 1$.



Pour l'intégrale, on obtient donc

$$\int_0^1 E(nx)dx = \frac{1}{n}(0+1+2+\cdots+(n-1)) = \frac{n-1}{2}.$$

Correction des Exercices du 18/11

Exercice 3. 1. La fonction $f(x) = e^x$ est continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ donc, par le théorème de Heine, elle est uniformément continue sur $[a,b]$.

2. On montre que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ par l'absurde. Si c'était le cas, on aurait, en choisissant par exemple $\varepsilon = 1$ dans la propriété d'uniforme continuité que

$$\exists h > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x-y| \le h \implies |e^x - e^y| \le 1.$$

Donc, avec $y = x + h$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^x - e^{x+h}| \le 1.$$

Mais $|e^x - e^{x+h}| = e^x(e^h - 1)$ qui devient plus grand que 1 quand x tend vers l'infini.

3. On fait comme dans le cours. La fonction g est uniformément continue sur $[a,b]$ par le théorème de Heine donc

$$\exists h > 0, \quad \forall x, y \in [a,b], \quad |x-y| \le h \implies |g(x) - g(y)| \le \varepsilon.$$

On considère une subdivision régulière $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$, de pas $(b-a)/n$, avec n assez grand pour que $(b-a)/n \leq h$. On peut alors définir φ comme

$$\varphi(t) = g(t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}[, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

et $\varphi(b) = g(b)$. La fonction φ est bien en escalier et, soit $x \in [a, b[$. Il existe un indice i tel que $x \in [t_i, t_{i+1}[$ et on a

$$|g(x) - \varphi(x)| = |g(x) - g(t_i)| \leq \varepsilon \quad \text{car } |x - t_i| \leq h.$$

De plus, $|g(b) - \varphi(b)| = 0 \leq \varepsilon$. La fonction φ vérifie donc bien la propriété demandée.

Exercice 4. 1. En prenant le logarithme, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right),$$

que l'on peut interpréter comme une somme de Riemann associée à la fonction $\ln(1+x^2)$ et la subdivision uniforme $\{0, 1/n, 2/n, \ldots, 1\}$ de l'intervalle $[0, 1]$. Par un résultat du cours, on a donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right) &= \int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx \\ &= \ln(2) - 2\left(\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

La limite du produit est donc l'exponentielle de la quantité précédente, c'est à dire

$$\frac{2}{e^2}e^{\pi/2}.$$

2. Pour la deuxième somme, en écrivant

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

on reconnait une somme de Riemann associée à la fonction $x\sin(\pi x/2)$ et la subdivision uniforme $\{0, 1/n, 2/n, \ldots, 1\}$ de l'intervalle $[0, 1]$. Par un résultat du cours, on a que la limite demandée égale

$$\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \left[-x\left(\frac{2}{\pi}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2.$$

Correction des Exercices du 25/11

Exercice 5. 1. En considérant la subdivision uniforme $\{0, c/n, 2c/n, \ldots, c\}$ de l'intervalle $[0, c]$, de pas c/n, on a que

$$\int_0^c e^x dx = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{kc/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n}e^{c/n}\frac{1-e^c}{1-e^{c/n}},$$

où on a utilisé la formule pour une somme géométrique

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}, \qquad x \neq 1.$$

Comme $e^{c/n} \sim 1 + c/n$ pour n grand, on obtient pour limite $e^c - 1$ (ce qui est bien la valeur de l'intégrale).

2. Pour l'intégrale J on nous donne la subdivision P. Remarquons que celle-ci n'est pas uniforme. Par la formule du cours, on a donc, avec la fonction $f(x) = 1/x$ et la subdivision P,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dx}{x} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}\right)\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right).\end{aligned}$$

On a $(b/a)^{1/n} = e^{\ln(b/a)/n}$. En utilisant le développement limité de l'exponentielle près de 0 comme précédemment, on obtient finalement comme limite $\ln(b/a)$ (qui est bien la valeur de l'intégrale).

Exercice 6. 1. On a

$$t_n = \frac{n(1+3/n)}{-3n(1-(-1)^n\sqrt{n}/(3n))} \sim -\frac{1}{3},$$

ce qui entraine que tous les t_n sont négatifs (pour n grand) et que la série des t_n diverge.

2. On a

$$u_n = 1 - \frac{n}{2}\left(\ln(1+1/n) - \ln(1-1/n)\right) = 1 - \frac{n}{2}\left(\frac{2}{n} + \frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \sim -\frac{1}{3n^2},$$

ce qui entraine que tous les u_n sont négatifs (pour n grand) et que la série des u_n converge.

3. Comme l'expression de v_n ne contient que des produits, on essaie la règle de d'Alembert :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)2(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = 2(2n+1)(2n+2)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

On a déjà vu (en passant à l'exponentielle) que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

donc $\lim_{n\to\infty}(v_{n+1}/v_n) = \infty$ et donc la série des v_n diverge.

Correction de l'exercice du 2/12

Exercice 7. 1. Comme

$$\lim_{n\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = 1,$$

on a bien l'équivalence de u_n et v_n quand $n \to \infty$.

2. Comme la suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante et converge vers 0, la série $\sum u_n$ est convergente par le théorème de Leibniz sur les séries alternées.

3. On a

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] = u_n - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La série $\sum(\frac{1}{n} - o\left(\frac{1}{n}\right))$ est de même nature que la série $\sum \frac{1}{n}$ donc divergente. La série $\sum v_n$ est la somme de la série convergente $\sum u_n$ et d'une série divergente donc est divergente.

4. C'est un exemple de deux séries dont les termes sont équivalents, mais qui ne sont pas de même nature. Cela illustre le fait que pour utiliser le théorème de comparaison par équivalents, il faut que les termes soient de signe constant (ce qui n'est pas le cas ici).

Correction de l'exercice du 9/12

Exercice 8. 1. En dérivant, on obtient

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x} = -1 - \frac{1}{\tan^2 x}.$$

2. D'après la question précédente, on a

$$\left(t + \frac{1}{\tan t}\right)' = -\frac{1}{\tan^2 t}.$$

En faisant une IIP et en utilisant l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t} dt &= \left[-t\left(t + \frac{1}{\tan t}\right)\right]_x^{3x} + \int_x^{3x} \left(t + \frac{1}{\tan t}\right) dt \\ &= \left[-t^2 - \frac{t}{\tan t} + \frac{t^2}{2} + \ln \sin t\right]_x^{3x} = \left[-\frac{t}{\tan t} - \frac{t^2}{2} + \ln \sin t\right]_x^{3x}.\end{aligned}$$

3. Lorsque t tend vers 0, on a

$$\frac{t}{\tan t} \to 1, \quad \frac{t^2}{2} \to 0.$$

De plus,

$$\ln \sin 3x - \ln \sin x = \ln\left(\frac{\sin 3x}{\sin x}\right) \to \ln 3, \quad \text{quand } x \to 0,$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t} dt = \ln 3.$$