Analyse Numérique – M 206 **Licence Semestre 4**

Corrigé examen – Juin 2006

Exercice 1

1. C'est un résultat du cours. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a, b]$. Soit $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ et $I_2(f)$ la valeur approchée obtenue par interpolation en 2 points x_0 et x_1, alors

$$|I(f) - I_2(f)| \leq \frac{M_2}{2} \int_a^b |x - x_0||x - x_1|dx,$$

avec $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)|$.

2. Dans la méthode du trapèze, $x_0 = a$ et $x_1 = b$ donc

$$\int_a^b |x - x_0||x - x_1|dx = -\int_a^b (x - a)(x - b)dx.$$

Un calcul rapide (à faire) montre que cette intégrale vaut $(b - a)^3/6$, ce qui avec la majoration précédente, donne la borne $\frac{M_2}{12}(b - a)^3$.

3. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{(\sin x)/2}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(\cos x)e^{(\sin x)/2}, \\ f^{(2)}(x) &= (\frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin x)e^{(\sin x)/2} = \frac{1}{4}(\cos^2 x - 2\sin x)e^{(\sin x)/2}. \end{aligned}$$

Pour majorer le facteur devant l'exponentielle dans $f^{(2)}(x)$, on fait le changement de variable $u = \sin x$. On doit donc majorer

$$\cos^2 x - 2\sin x = 1 - 2u - u^2,$$

pour $u \in [-1, 1]$. Ce trinôme passe par la valeur maximum 2 en -1 et vaut -2 en 1 donc $|1 - 2u - u^2| \leq 2$ sur $[-1, 1]$. D'autre part, $|e^{(\sin x)/2}| \leq \sqrt{e}$ sur $[0, 2\pi]$, donc

$$|f^{(2)}(x)| \leq \sqrt{e}/2, \quad x \in [0, 2\pi].$$

D'après le résultat de la question 2, l'erreur obtenue en appliquant la méthode des trapèzes sur 4 sous-intervalles de $[0, 2\pi]$ est majorée par

$$\frac{4}{12}\frac{\sqrt{e}}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{e}\pi^3}{48}.$$

Pour 8 intervalles, on obtient la majoration

$$\frac{8}{12}\frac{\sqrt{e}}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{\sqrt{e}\pi^3}{192}.$$

Exercice 2

1. La dérivée de f vaut $f'(x) = 1 + \ln(x)$ qui est strictement positive pour $x \in [1, +\infty]$. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty]$, en particulier c'est une bijection de $[1, +\infty]$ sur son image. La fonction étant croissante, son image est l'intervalle $[f(1), f(+\infty)] = [0, +\infty]$.

2. On remarque que $f(e) = e$. Donc l'image de e par la fonction réciproque f^{-1} est e, c'est à dire $f^{-1}(e) = e$.

3. La valeur $f^{-1}(a)$ est un point fixe de φ si et seulement si

$$\frac{a}{\ln(f^{-1}(a))} = f^{-1}(a) \quad \Longleftrightarrow$$

$$f^{-1}(a)\ln(f^{-1}(a)) = a \quad \Longleftrightarrow$$

$$f(f^{-1}(a)) = a,$$

qui est bien vérifiée.

4. Il faut que $f^{-1}(a)$ soit un point fixe attractif de φ. D'après le cours, une condition suffisante pour cela est :

$$\begin{aligned}
|\varphi'(f^{-1}(a))| < 1 \Longleftrightarrow &\quad a < f^{-1}(a)\ln(f^{-1}(a))^2 \\
\Longleftrightarrow &\quad f(x) < x(\ln x)^2, \quad \text{(en posant } x = f^{-1}(a)) \\
\Longleftrightarrow &\quad 1 < \ln x \quad \Longleftrightarrow \quad e < x \\
\Longleftrightarrow &\quad f(e) < a \quad \text{(car } f \text{ croissante)} \quad \Longleftrightarrow \quad e < a.
\end{aligned}$$

Si $a = e$, la suite de Picard est constante de valeur $a = e$ qui converge bien vers le point fixe $f^{-1}(a) = f^{-1}(e) = e$. Les valeurs de a recherchées sont donc celles qui sont dans l'intervalle $[e, +\infty[$.

5. Théorème du point fixe : Soit $D \subset \mathbb{R}$, D fermé, soit $g : D \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :
$g(D) \subset D$,
g est une contraction de rapport $k \in [0, 1[$.
Alors
Il existe un unique point fixe $\overline{x}$ de g dans D,
$\forall x_0 \in D$, la suite de Picard $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers $\overline{x}$.

6. Cette équation peut se réécrire $f(x) = a$. Comme f est une bijection de $[1, +\infty[$ sur

$[0, +\infty[$, l'équation admet une solution unique sur $[1, +\infty[$.
L'équation s'écrit aussi $g(x) = 0$, avec $g(x) = x\ln(x) - a$. La méthode de Newton consiste à construire la suite de Picard $x_{p+1} = \psi(x_p)$, avec

$$\psi(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{x\ln(x) - a}{1 + \ln x} = \frac{x + a}{1 + \ln x}.$$

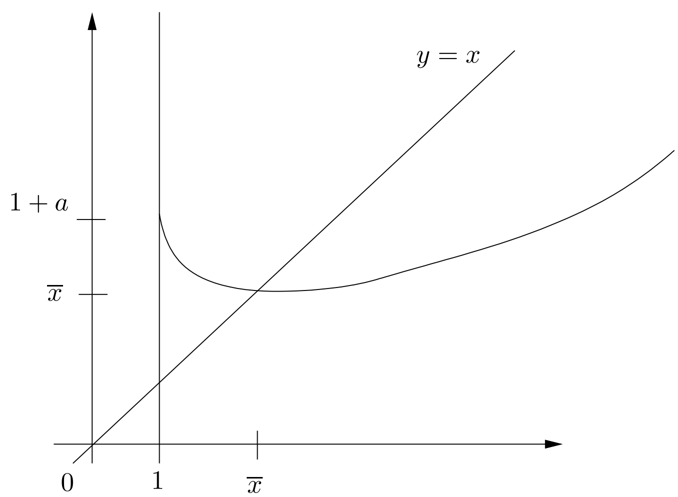
7. On a

$$\psi'(x) = \frac{\ln x - a/x}{(1 + \ln x)^2}.$$

Soit $\overline{x}$ la solution de $x\ln(x) - a = 0$, alors pour le signe de $\psi'(x)$, on a

x	1		$\overline{x}$		$+\infty$
$\psi'(x)$	$-a$	$-$	0	$+$	

De plus $\psi(1) = 1 + a$ et $\psi(\overline{x}) = \overline{x}$. On peut dessiner le graphe :



8. Pour $x \geq \overline{x}$, on a

$$|\psi'(x)| = \frac{\ln x - a/x}{(1 + \ln x)^2} \leq \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}.$$

Comme la fonction $u/(1 + u)^2$ passe par un maximum pour $u = 1$ qui vaut $1/4$, on en déduit que $|\psi'(x)| \leq 1/4$ pour $x \geq \overline{x}$.

9. Le théorème du point fixe s'applique sur $D = [\overline{x}, +\infty[$ car $\psi(D) \subset D$ (voir le graphe de ψ) et D est un fermé de $\mathbb{R}$. D'après l'inégalité $|\psi'(x)| \leq 1/4$ sur D, ψ est contractante sur D donc si $x_0 \in D$, la suite $x_{p+1} = x_p$ converge vers $\overline{x}$. Si $x_0 \in [1, \overline{x}]$ alors $x_1 \in [\overline{x}, +\infty]$ (voir le graphe de ψ) et x_p converge encore vers $\overline{x}$.