2eme partie : Analyse numérique

*les exercices 1 et 2 sont indépendants
barème indicatif :6+14*

Exercice 1 :

On considère le tableau des différences divisées suivant

x	y			
-1	4			
		-3		
0	1	b		
		21	37	
1	22	123		
		a	c	
2	289			

(1)

1. Calculer les quantités a et b
2. Donner, sous forme de Newton, le polynôme qui interpole les 4 données y_i aux 4 points x_i .
3. Donner la relation entre une différence divisée d'ordre k $f[x_0, \dots, x_k]$ et une des dérivées de f .
4. En supposant que le tableau correspond aux valeurs d'une fonction polynôme de degré 3, calculer la quantité c .

Exercice 2 :

On considère une fonction f de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$, 2 fois continuellement dérivable, et 2 points arbitraires x_1, x_2 de $[-1, 1]$, avec $x_1 \neq x_2$.

1.
 - Donner l'expression de p_1 polynôme d'interpolation de f , de degré 1, aux points x_1, x_2 , sous la forme de Lagrange.
 - Donner la formule d'erreur $f(x) - p_1(x)$
2. On prend $Q_1(f) = \int_{-1}^1 p_1(x) dx$ pour approximation de $I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$.
 - Montrer que $Q_1(f) = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$ en précisant A_1 et A_2 .

- Dédurre de 1) une expression de $I(f) - Q_1(f)$.
- Donner en fonction de $M = \sup_{x \in [-1,1]} |f''(x)|$ une majoration de $|I(f) - Q_1(f)|$.

3. On définit une autre approximation de $I(f)$, soit

$$\tilde{Q}_1(f) = \tilde{A}_1 f(x_1) + \tilde{A}_2 f(x_2)$$

en imposant : si $f = 1$ ou $f = x$ alors $I(f) = \tilde{Q}_1(f)$. En déduire les deux équations vérifiées par $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, x_1, x_2$.

Pour x_1, x_2 arbitraires fixés et différents, montrer que Q_1 et $\tilde{Q}_1$ coïncident.

4. • Ecrire les deux autres équations vérifiées par $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, x_1, x_2$ si on impose de plus: pour $f = x^2$ et pour $f = x^3$, $\tilde{Q}_1(f) = I(f)$.
- Si on prend $x_1 = -x_2$, trouver $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, x_1, x_2$ tels que $\tilde{Q}_1(f) = I(f)$ pour $f = 1, x, x^2, x^3$.
5. Soit $Q(f) = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$ vérifiant $Q(f) = I(f)$ pour $f = 1, x, x^2, x^3$, et $v(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. Montrer que

$$\int_{-1}^1 x^k v(x) dx = 0 \text{ pour } k = 0, 1 .$$

En déduire que les $x_i, i = 1, 2$ sont uniquement déterminés.