

DEUG MIAS 2, Analyse numérique

Examen, Septembre 2004 (*durée 3 heures*)

aucun document ni calculatrice n'est autorisé

les exercices 1 et 2 sont indépendants

barème indicatif :

Exercice 1 :

On veut calculer une valeur approchée de $I(f) = \int_{-1}^{+1} f(x)dx$. On considère la formule de quadrature suivante : pour $\alpha \in]0, 1[$

$$Q(f) = w_0 f(-\alpha) + w_1 f(0) + w_2 f(\alpha) .$$

1. Soit $\mathcal{P}_2$, l'ensemble des polynômes de degré au plus deux. Montrer l'équivalence des deux problèmes suivants :

$$(\forall p \in \mathcal{P}_2, I(p) = Q(p)) \quad \text{et} \quad (\text{pour } p = 1, x, x^2, \quad I(p) = Q(p)) .$$

2. Ecrire les équations qui déterminent les inconnues w_0, w_1, w_2 , de sorte que $I(p) = Q(p)$ pour tout p polynôme de degré 2. On calculera les w_i en fonction de α .
3. Ecrire la formule obtenue pour $\alpha = 1$. Quelle formule obtient-on ?
4. Si on considère maintenant α comme une inconnue, calculer α pour que la quadrature soit exacte ($I(f) = Q(f)$) pour des polynômes de degré supérieur à deux. Jusqu'à quel degré n_Q peut on aller ?
5. On veut une formule de même type sur l'intervalle $[0, 1]$. Dédurre de ce qui précède les deux points a et b telle que

$$\tilde{Q}(f) = w_0 f(a) + w_1 f(1/2) + w_2 f(b)$$

soit égal à $\int_0^1 f(t)dt$ pour tout f polynôme de degré inférieur ou égal à n_Q .

Exercice 2 :

Soit ε un point de $]0, 1[$, et f une fonction de classe C^3 sur $[0, 1]$.

1. Calculer le polynôme P_2^ε qui interpole f en $0, \varepsilon, 1$, dans la base de Newton

$$1, x, x(x - \varepsilon) .$$

2. Donner la formule de l'erreur $f(x) - P_2^\varepsilon(x)$.

3. Montrer que pour chaque $x \in [0, 1]$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_2^\varepsilon(x) = f(0) + xf'(0) + (f(1) - f(0) - f'(0))x^2. \quad (1)$$

4. Vérifier que le polynôme $P(x)$ défini par (1) est l'unique polynôme tel que

$$P(0) = f(0), \quad P'(0) = f'(0), \quad P(1) = f(1).$$

5. Pour un x_0 arbitraire de l'intervalle $]0, 1[$, on pose $K = \frac{f(x_0) - P(x_0)}{x_0^2(x_0 - 1)}$, puis

$$\phi(t) = f(t) - P(t) - Kt^2(t - 1).$$

Montrer que la fonction ϕ' est nulle en trois points, la fonction ϕ'' en deux points et enfin la fonction $\phi^{(3)}$ en un point $\xi \in]0, 1[$.

En déduire une majoration de l'erreur $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - P(x)|$ en fonction de $M = \sup_{x \in [0, 1]} |f^{(3)}(x)|$.