**Université Aix-Marseille** **2020–2021**

**Agrégation Mathématiques**
**Devoir Surveillé Octobre 2020 – 6 heures max.**
**Les notes du cours d'analyse complexe sont autorisées**

# Problème 1

On note $\mathbb{D}$ et $D_R$ les disques ouverts de rayon 1 et R, $I$ l'intervalle fermé $=[-1,1]$, $\mathscr{P}_n$ l'espace des polynômes à coefficients complexes, de degré au plus $n$. Pour une fonction $f$ définie sur un compact $K \subset \mathbb{C}$, on notera

$$\|f\|_K = \sup_{z\in K} |f(z)| \qquad \text{et} \qquad d_n(f,K) = \inf_{p\in\mathscr{P}_n} \|f-p\|_K,$$

c'est à dire $d_n(f,K)$ est la distance de $f$ aux polynômes de degré au plus $n$, en norme du sup sur $K$. Le théorème de Weierstrass dit que, pour $f$ continue sur l'intervalle $I$, $\lim_{n\to\infty} d_n(f,I) = 0$. Un théorème plus précis de Bernstein dit que la décroissance des $d_n(f,I)$ avec $n$ est géométrique si et seulement si $f$ admet un prolongement analytique dans un voisinage ouvert de $I$. Le but du problème est de prouver ce théorème, dont l'énoncé précis est le suivant :

**Theorem 1** (S. Bernstein 1912)**.** *Soit $R > 1$ et $f$ continue sur $I = [-1,1]$. Alors $f$ se prolonge en une fonction analytique à l'intérieur de l'ellipse*

$$E_R = \{w \in \mathbb{C},\ w = Re^{i\theta} + 1/(Re^{i\theta}),\ \theta \in [0,2\pi]\}$$

*si et seulement si*

$$\limsup_n d_n(f,I)^{1/n} \le 1/R.$$

La 1ere partie du problème consiste à donner une version du théorème pour le disque unité $\mathbb{D}$ au lieu de l'intervalle $I$.

**1)** Soit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ une fonction analytique dans $D_R$ avec $R > 1$. En utilsant les inégalités de Cauchy dans le disque $D_r$, $1 < r < R$, et l'approximation de $f$ obtenue par troncature de sa série, montrer que

$$d_n(f,\overline{\mathbb{D}}) \le \frac{\|f\|_{\overline{D}_r}}{r^n(r-1)}.$$

**2)** En déduire que

$$\limsup_n d_n(f,\overline{\mathbb{D}})^{1/n} \le 1/R. \tag{1}$$

On s'intéresse dans les questions 3) à 5) à la réciproque, toujours pour le cas du disque.

**3)** Soit $p_n$ un polynôme de degré $n$. En appliquant le principe du maximum à l'extérieur de $\mathbb{D}$, montrer que, pour $R > 1$,

$$\|p_n\|_{\overline{D}_R} \le \|p_n\|_{\overline{\mathbb{D}}} R^n.$$

**4)** Soit $f$ une fonction continue dans $\overline{\mathbb{D}}$. Pour $n \ge 0$, on note $p_n$ un polynôme de degré $n$ qui réalise la distance $d_n(f,\overline{\mathbb{D}})$, c'est à dire

$$\|f-p_n\|_{\overline{\mathbb{D}}} = d_n(f,\overline{\mathbb{D}}).$$

On suppose que l'inégalité (1) est vérifiée. Cela entraine que pour tout $R' < R$ et $n$ assez grand, $d_n(f,\overline{\mathbb{D}}) \le (1/R')^n$. On veut montrer que $f$ est la trace d'une fonction analytique dans le disque $D_R$. Pour cela, on considère

$$p_N = p_0 + \sum_{n=1}^{N} (p_n - p_{n-1}),$$

et $1 < \rho < R' < R$. Montrer la convergence normale de la série dans $\overline{D}_\rho$. En déduire la convergence uniforme, sur tout compact de $D_R$, de $p_N$ vers une fonction analytique $F$ dans $D_R$.

**5)** Justifier que $F = f$ sur $\overline{\mathbb{D}}$. Cela montre donc que $f$ admet un prolongement analytique à $D_R$ et conclut la preuve de la version du théorème dans $\mathbb{D}$.

Dans la 2ieme partie du problème, qui suit, on prouve la version pour l'intervalle $I$, c'est à dire le théorème 1.

**6)** Soit l'application

$$z = \Phi(w) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right), \qquad w \neq 0.$$

Quel est l'image du cercle unité $\mathbb{T}$ par $\Phi$ ? Montrer que $\Phi$ est une application conforme de $\{|w| > 1\}$ dans $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$. Pour montrer que $\Phi$ est bijective entre les domaines donnés, on pourra considérer l'image des cercles de rayons plus grand que 1. Pour l'analyticité de $\Phi^{-1}$, on pourra utiliser que $\sqrt{z^2-1}$ est analytique en dehors de $[-1,1]$, ou bien utiliser un théorème plus général sur les fonctions analytiques (si vous le connaissez).

**7)** Soit $p$ un polynôme de degré au plus $n$. En appliquant le principe du maximum à la fonction $(p \circ \Phi)(w)/w^n$ à l'extérieur du disque unité, montrer que

$$\|p\|_{E_R} \leq \|p\|_I R^n.$$

**8)** En suivant le schéma de la preuve dans le cas du disque, prouver l'implication indirecte du Théorème 1.

Le but des quatre dernières questions est de prouver l'implication directe du Théorème 1.

**9)** On suppose $f$ analytique à l'intérieur de $E_R$. L'application $f \circ \Phi$ est donc analytique dans la couronne $1 < |w| < R$. Ainsi, elle admet un développement de Laurent $(f \circ \Phi)(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n$ avec

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} \frac{f(\Phi(w))}{w^{n+1}} dw, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

où $1 < \rho < R$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $c_n = c_{-n}$.

**10)** Soit $\Psi$ l'application réciproque de $\Phi$, de $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ dans $\{|w| > 1\}$. On définit les fonctions $T_n$, $n \in \mathbb{N}$, telles que $T_0(z) = 1$ et

$$T_n(z) = 2^{-n}(\Psi(z)^n + \Psi(z)^{-n}), \quad n \geq 1.$$

On peut vérifier que l'on obtient ainsi les polynômes bien connus de Chebyshev $T_n$, avec $\deg T_n = n$. En remarquant que $\Psi$ se prolonge à $[-1,1]$, justifier que $\|T_n\|_I = 2^{1-n}$ pour $n \geq 1$.

**11)** Montrer que, pour $z$ à l'intérieur de l'ellipse $E_R$, $f$ admet le développement en série de Chebyshev,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(z), \qquad a_n = \frac{2^{n-1}}{i\pi} \int_{|w|=\rho} \frac{f(\Phi(w))}{w^{n+1}} dw.$$

**12)** Répéter la preuve vue dans le cas du disque pour obtenir l'implication directe du Théorème 1.

## Problème 2

On désigne par $H^\infty$ l'ensemble des fonctions, analytiques dans le disque unité ouvert $\mathbb{D}$, qui sont bornées. On admettra qu'une fonction $f$ de $H^\infty$ admet des limites radiales

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$$

presque partout sur le cercle unité $\mathbb{T}$. Le but du problème est de montrer que si $f^*$ s'annule sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure non nulle, alors $f$ est nulle. Fatou a prouvé ce résultat (dans une forme un peu plus faible) en 1906.

**1)** On rappelle le lemme de Fatou. Soit $X$ un espace mesurable muni d'une mesure positive $\mu$. Soit $f_n$ une suite de fonctions mesurables sur $X$, à valeurs dans $[0,\infty]$. Alors

$$\int (\liminf_n f_n) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Justifier que si $\mu$ est une mesure finie, et si $f_n$ est une suite de fonctions mesurables sur $X$, uniformément majorées, alors

$$\limsup_n \int f_n d\mu \leq \int (\limsup_n f_n) d\mu.$$

**2)** Soit $r \in \mathbb{R}$ et

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \log\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \log|1 - re^{i\theta}|^2 d\theta.$$

Montrer que l'intégrale converge pour tout $r$ réel.

**3)** Comparer $I(r), I(-r)$ et $I(1/r)$.

**4)** En utilisant le théorème de Cauchy, montrer que $I(r) = 0$ pour $0 < r < 1$. En déduire $I(r)$ pour $r > 1$.

**5)** Prouver que $I(1) = I(-1) = 0$ avec le théorème de convergence dominée.

**6)** Soit $f$ une fonction holomorphe au voisinage d'un disque fermé $\overline{D}(0,r)$, telle que $f(0) \neq 0$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ les zéros éventuels de $f$ contenus dans $\overline{D}(0,r)$, chaque zéro étant compté selon sa multiplicité. Soit $\varepsilon$ tel que $f$ soit holomorphe dans $D(0, r+\varepsilon)$ et n'y ait pas d'autres zéros que les $a_i$. On peut écrire

$$f(z) = g(z) \prod_{j=1}^{n} (z - a_j),$$

où $g$ est holomorphe dans $D(0, r+\varepsilon)$ et ne s'annule pas. Justifier que la fonction $\log g$ est bien définie dans $D(0, r+\varepsilon)$ et que

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})| d\theta.$$

On pourra admettre ces résultats dans un premier temps.

**7)** En déduire que, pour $f$ vérifiant les hypothèses précédentes,

$$\log|f(0)| - \sum_j \log|a_j| + n\log r = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{2}$$

Cette formule est appelée la formule des zéros de Jensen (pour la petite histoire, Jensen pensait que cette formule lui permettrait de prouver l'hypothèse de Riemann).

**8)** Soit $f$ une fonction, holomorphe dans $D(0,R)$, différente de la fonction nulle. Dans cette question, il faudra traiter, à chaque fois, le cas $f(0) \neq 0$ puis le cas $f(0) = 0$. Montrer que :

**a)** la fonction $\log|f|$ est intégrable sur tout cercle $\{|z| = r\}$, $0 < r < R$,

**b)** $\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| d\theta$ est une fonction croissante de $r \in ]0, R[$,

**c)** On a

$$\forall r \in ]0,R[, \qquad \log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| d\theta.$$

**9)** Lorsque la fonction $f$ se prolonge continuement à $\overline{D}(0,R)$, on peut se demander si les assertions de la question précédente sont vraies pour $r = R$. On suppose, sans perte de généralité, que $R = 1$. Vérifier, en utilisant le lemme de Fatou, qu'on a effectivement que $\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta$ est une fonction croissante de $r \in ]0,1]$, et que $\log|f|$ est intégrable sur $\mathbb{T}$ (lorsque $f$ est non nulle).

**10)** Vérifier que les résultats de la question précédente s'étendent aux fonctions $f$ dans $H^\infty$. En déduire que si la limite radiale $f^*$ de $f \in H^\infty$ s'annule sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure non nulle, alors $f$ est nulle.