Université Aix-Marseille **2021–2022**

Agrégation Mathématiques
Devoir Surveillé Octobre 2021 – 4 heures

Quelques résultats sur les fonctions $\Gamma(s)$ et $\zeta(s)$

Ces résultats peuvent être utilisés, sans preuve, dans la résolution du problème.

Fonction $\Gamma(s)$: elle est définie par

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt,$$

dans le domaine $\mathrm{Re}(s) > 0$ (où l'intégrale converge). Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, sans zéros, avec des pôles simples en $0, -1, -2, \dots$

La fonction Γ vérifie

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad s \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{1}$$

Soit $\delta > 0$ et $R(\delta)$ le secteur $\{s \in \mathbb{C},\ |\arg s| \leq \pi - \delta\}$. Alors

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi}s^{s-1/2}e^{-s}(1 + \mathscr{O}(1/|s|)) \quad \text{lorsque } |s| \to \infty \text{ dans } R(\delta). \tag{2}$$

Fonction $\zeta(s)$: elle est définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}, \tag{3}$$

dans le domaine $\mathrm{Re}(s) > 1$, où elle est analytique. Elle admet un prolongement analytique à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, avec $s = 1$ comme pôle simple, de résidu 1. La fonction

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}$$

vérifie l'équation fonctionnelle

$$\xi(s) = \xi(1-s), \qquad s \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Exercice (Agreg Docteur 2019)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i}{n} z^{n^2}, \qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} 2^{(-1)^n n} z^n, \qquad c) \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2^n) z^n.$$

Pour la dernière série, on pourra montrer que $R \geq 1$ et $R \leq 1$.

Problème

Le but du problème est de prouver le théorème suivant :

Theorem 1 (Hardy 1914)**.** *La fonction* $\zeta(s)$ *admet une infinité de zéros sur la droite* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

1ere partie

1) Soit ϕ une fonction de classe C^1 sur $[p, p+1]$, $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\phi(p+1) = \int_p^{p+1} \phi(x)dx + \int_p^{p+1} (x-[x])\phi'(x)dx,$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

2) Soit $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{p \geq n+1} p^{-s} = \frac{n^{1-s}}{s-1} - s\int_n^{\infty} (x-[x])x^{-s-1}dx.$$

3) Montrer que, pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, $s \neq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta(s) = \sum_{p=1}^{n} p^{-s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} - s\int_n^{\infty} (x-[x])x^{-s-1}dx. \tag{5}$$

(il faudra utiliser un prolongement analytique).

4) Soit $1/2 \leq \sigma \leq 2$. Soit $T \geq 2$ et $n = [T]$ dans (5). En majorant la somme à droite (par une intégrale), ainsi que les deux autres termes, montrer qu'il existe des constantes c_1 et C_1 telles que,

$$|\zeta(\sigma+iT)| \leq c_1\sqrt{T}, \qquad \left|\int_{1/2}^{2} \zeta(\sigma+iT)d\sigma\right| \leq C_1\sqrt{T}. \tag{6}$$

5) Montrer en utilisant directement (3) que, pour $T \geq 2$ grand,

$$\int_1^T \zeta(2+it)dt = T + \mathscr{O}(1), \tag{7}$$

(permuter l'intégrale et la somme).

6) Déduire de (6), (7), et du théorème de Cauchy que pour $T \geq 2$, grand,

$$\int_1^T \zeta(1/2+it)dt = T + \mathscr{O}(\sqrt{T}), \tag{8}$$

(le théorème de Cauchy permet de déplacer le contour).

7) Soit $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ où l'on suppose que σ reste dans un compact de $(0, \infty)$ et $|t|$ est grand. Montrer, en utilisant (2), que

$$|\Gamma(s)| \asymp |t|^{\sigma-1/2}e^{-\pi|t|/2}, \tag{9}$$

où la notation $f(x) \asymp g(x)$ signifie que $f(x)$ et $g(x)$ sont du même ordre à des constantes multiplicatives près. De manière précise, il existe deux constantes absolues c, C telles que

$$cg(x) \leq f(x) \leq Cg(x).$$

On rappelle aussi que $\arctan(t) \sim t$ pour t petit.

8) Soit $z = e^{i\theta}$ et
$$W(t,z) := |\Gamma(1/4+it/2)| z^{-it/2} > 0.$$
Soit $\theta = \pi/2 - \delta$ avec $\delta > 0$ petit. Déduire de la question précédente qu'il existe une constante C_2 telle que
$$C_2 \leq t^{1/4} W(t,z), \qquad \text{pour } t \text{ grand et } t \leq 1/\delta.$$
9) On introduit la fonction (appelée fonction zeta de Hardy)
$$Z(t) = \zeta(1/2+it) \frac{\Gamma(1/4+it/2)\pi^{-1/4-it/2}}{\left|\Gamma(1/4+it/2)\pi^{-1/4-it/2}\right|}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
Elle a l'avantage sur $\zeta(1/2+it)$ de prendre des valeurs réelles. Justifiez-le (utiliser (4) et le fait que $\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}$). On peut donc remplacer la fonction $\zeta(1/2+it)$ par $Z(t)$, $t \in \mathbb{R}$, dans l'énoncé du théorème de Hardy.

10) Montrer qu'il existe une constante C_3 telle que, pour δ petit,
$$C_3 \leq \delta^{3/4} \int_{-\infty}^{\infty} W(t,z) |Z(t)| dt, \tag{10}$$
(il suffit de minorer l'intégrale prise, par exemple, entre $1/(2\delta)$ et $1/\delta$).

2ieme partie

11) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\Gamma(s) \sim \frac{(-1)^k}{k!(s+k)} \quad \text{quand } s \to -k.$$
12) Soit $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $c > 0$. Montrer que
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} ds = e^{-z}, \tag{11}$$
où l'intégrale est prise sur la droite verticale $\mathrm{Re}(s) = c$. Pour cela, considérer l'intégrale sur le rectangle R_K de sommets $c - iK$, $c + iK$, $-K + iK$, $-K - iK$, utiliser le théorème des résidus, et faire tendre K vers l'infini. On **admettra** que les 3 intégrales autres que celle de $c - iK$ à $c + iK$ tendent vers 0 quand $K \to \infty$.

13) Montrer, en utilisant (9), que l'intégrale précédente est absolument convergente.

14) Soit $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $c > 1$. Montrer, en utilisant la convergence dominée, que
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \zeta(s)\Gamma(s/2)(\pi z)^{-s/2} ds = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 z},$$
15) Soit $\mathrm{Re}(z) > 0$. Montrer, en considérant l'intégrale précédente sur un certain rectangle, que
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \zeta(s)\Gamma(s/2)(\pi z)^{-s/2} ds = -z^{-1/2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 z}. \tag{12}$$
16) Montrer que pour $z = e^{i\theta}$, $\theta = \pi/2 - \delta$ avec $\delta > 0$ petit, il existe une constante C_4 telle que le module du membre de droite de (12) soit majoré par $C_4 \delta^{-1/2}$ (utiliser une comparaison avec une intégrale).

17) En déduire que, pour δ petit, il existe une constante C_5 telle que
$$\int_{-\infty}^{\infty} W(t,z) Z(t) dt \leq C_5 \delta^{-1/2}. \tag{13}$$
18) Conclure la preuve du Théorème 1 en utilisant (10) et (13).