Université Aix-Marseille **2022–2023**

Agrégation Mathématiques
Devoir Surveillé Octobre 2022 – 5 heures

On rappelle quelques résultats qui pourront être utilisés sans démonstration :

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ des exposants conjugués, i.e. $1/p + 1/q = 1$. On rappelle l'inégalité de Hölder (dans le cas de sommes finies) pour des nombres complexes a_n, b_n :

$$\sum_{n=-N}^{N} |a_n b_n| \leq \|(a_n)\|_p \|(b_n)\|_q \quad \text{avec} \quad \|(a_n)\|_p = \left(\sum_{n=-N}^{N} |a_n|^p\right)^{1/p}, \quad \|(b_n)\|_q = \left(\sum_{n=-N}^{N} |b_n|^q\right)^{1/q},$$

(c'est une généralisation de Cauchy-Schwarz qui correspond au cas $p = q = 2$). De plus

$$\sup_{(a_n),\ \|(a_n)\|_p = 1} \left| \sum_{n=-N}^{N} a_n b_n \right| = \|(b_n)\|_q. \tag{1}$$

Espace des fonctions p-sommables $L^p(a,b)$, $1 \leq p < \infty$, sur un intervalle borné (a,b) :
– les fonctions en escalier sont denses.
– pour $p < q$, on a l'inclusion $L^q(a,b) \subset L^p(a,b)$ (mais on a aucune inclusion entre $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$).
On a aussi

$$f_n \to f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f_n \to g \quad \text{p.p.} \quad \Longrightarrow \quad f = g \quad \text{p.p.} \tag{2}$$

Coefficients de Fourier de $f \in L^1(0, 2\pi)$: Ils sont définis par

$$c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

et on a

$$f_k \to f \text{ dans } L^1(0, 2\pi) \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f_k) \to c_n(f).$$

Transformation de fourier : elle est définie dans $L^1(\mathbb{R})$ par la formule

$$\mathscr{F} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt,$$

et si $\mathscr{F} f \in L^1(\mathbb{R})$, on a la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F} f(t) e^{ixt} dt.$$

La transformée de Fourier se prolonge à $L^2(\mathbb{R})$ (qui n'est pas inclus dans $L^1(\mathbb{R})$) en une isométrie $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, et les formules précédentes sont remplacées par des limites au sens de la norme L^2 sur $\mathbb{R}$,

$$\left\| \mathscr{F} f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} f(t) e^{-ixt} dt \right\|_2 \to 0, \qquad \left\| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} \mathscr{F} f(t) e^{ixt} dt \right\|_2 \to 0,$$

lorsque $R \to \infty$, où les intégrales ont un sens car $[-R, R]$ étant compact, on a $L^2(-R,R) \subset L^1(-R,R)$.

Fonction de type exponentiel $T > 0$: c'est une fonction analytique f dans un domaine D non borné, dont la croissance est exponentielle, i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|f(z)| \leq C e^{T|z|}, \quad z \in D.$$

Les deux théorèmes de l'exercice 1 sont utiles pour la résolution des exercices 2 et 3.

Exercice 1

On rappelle le principe du maximum : soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique dans Ω, continue sur $\overline{\Omega}$. Alors tout majorant de $|f|$ sur $\partial\Omega$ majore $|f|$ sur Ω. Le but de cet exercice est de prouver deux extensions du principe du maximum à des domaines non bornés. Les extensions de ce type sont souvent appelées principes de Phragmen-Lindelöf dans la littérature.

1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ non borné. Montrer que le principe du maximum peut être faux sur Ω (i.e. que pour une fonction analytique sur Ω, continue sur $\overline{\Omega}$, un majorant de $|f|$ sur $\partial\Omega$ ne majore pas forcément $|f|$ sur Ω, utiliser par exemple la fonction e^z).

2) Dans la suite, $a < b \in \mathbb{R}$ sont fixés et Ω est la bande verticale $\Omega = \{x+it,\ a < x < b,\ t \in \mathbb{R}\}$. Soit $\varepsilon > 0$ et

$$\varphi_\varepsilon(z) = \frac{1}{1+\varepsilon(z-a)}.$$

Montrer que pour $z = x+iy \in \overline{\Omega}$,

$$|\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1, \qquad \varepsilon|y\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1.$$

3) Soit f analytique dans Ω, continue et bornée sur $\overline{\Omega}$. Soient

$$M = \sup_{\partial\Omega}|f|, \qquad C = \sup_{\Omega}|f|.$$

Appliquer le principe du maximum à la fonction $\varphi_\varepsilon f$ sur le rectangle $a < x < b$, $|y| < C/(M\varepsilon)$, puis le principe du maximum à la fonction f sur un rectangle de hauteur quelconque, et en déduire :

Theorem 1 (Phragmen-Lindelöf 1)**.** *Le principe du maximum s'applique à toute fonction f analytique sur la bande verticale Ω, continue et bornée sur $\overline{\Omega}$.*

Soit $0 < \psi < \pi/2$. On suppose dans la suite que D est le secteur angulaire défini par $|\arg z| < \psi$, et on suppose que f est une fonction continue dans $\overline{D}$, de type exponentiel T, et vérifiant $|f| \leq M$ sur ∂D.

4) Soit $A, B > 0$ et $|\theta| < \pi$. Soit $z = Re^{i\theta} \neq 0$. Calculer le module de e^{-Az^B}.

5) On suppose $B > 1$ et $B\psi < \pi/2$. On définit $f_1(z) = f(z)e^{-Az^B}$ dans $\overline{D}$. Montrer que pour z de module R assez grand, on a $|f_1(z)| \leq M$.

6) Montrer que $|f_1(z)| \leq M$ dans $\overline{D}$.

7) En déduire, en faisant $A \to 0$, le théorème suivant.

Theorem 2 (Phragmen-Lindelöf 2)**.** *Soit f analytique et de type exponentiel dans un secteur angulaire D d'ouverture $< \pi$. On suppose de plus que f est continue sur $\overline{D}$ et que $|f| \leq M$ sur ∂D. Alors $|f| \leq M$ sur $\overline{D}$.*

Exercice 2

1) Soit $f \in L^p(0,2\pi)$, $1 \leq p \leq 2$, muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi}\right)^{1/p}.$$

Soit $c(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de f. Montrer que

$$\|c(f)\|_\infty \leq \|f\|_1 \text{ pour } f \in L^1 \quad \text{et} \quad \|c(f)\|_2 \leq \|f\|_2 \text{ pour } f \in L^2.$$

Pour la 2ieme inégalité, qui est classique, il suffira de rappeler comment elle s'appelle.
Comme $(1,\infty)$ et $(2,2)$ sont des couples d'exposants conjugués, on peut conjecturer qu'une telle inégalité est vérifiée pour tout couple d'exposants (p,q) conjugués, avec $1 \le p \le 2$. Le but des questions suivantes est donc de prouver, par interpolation entre les cas $p=1$ et $p=2$, le résultat suivant.

Theorem 3 (Inégalité de Hausdorff-Young)**.** *Soit $1 \le p \le 2$ et q l'exposant conjugué de p. On a*

$$\forall f \in L^p(0,2\pi), \qquad \|c(f)\|_q \le \|f\|_p.$$

2) On suppose donc $1 < p < 2$. Soit f une fonction en escalier sur $[0,2\pi]$ avec $\|f\|_p = 1$ et soit $(a_n)_{-N\le n\le N}$ une suite finie de nombres complexes avec $\sum_n |a_n|^p = 1$. On pose

$$\varphi(t) = |f(t)|^{pz}\frac{f(t)}{|f(t)|}, \quad g(z) = \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^{pz}\frac{a_n}{|a_n|}c_n(\varphi) = \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^{pz}\frac{a_n}{|a_n|}\int_0^{2\pi}|f(t)|^{pz}\frac{f(t)}{|f(t)|}e^{-int}\frac{dt}{2\pi},$$

où l'on fait la convention que $A^z = 0$ si $A = 0$. Montrer que g est une fonction entière.

3) Montrer que $|g(z)| \le 1$ pour $\mathrm{Re}(z) = 1$ et $\mathrm{Re}(z) = 1/2$. Dans le 2ieme cas, on pourra utiliser les coefficients de Fourier de la fonction φ.

4) En déduire que $|g(z)| \le 1$ pour $1/2 \le \mathrm{Re}(z) \le 1$.

5) En considérant $g(1/p)$ montrer que $\|c(f)\|_q \le \|f\|_p$ où f est une fonction en escalier et q est l'exposant conjugué de p.

6) En déduire l'inégalité pour toute fonction $f \in L^p(0,2\pi)$.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de prouver le résultat suivant.

Theorem 4 (Paley-Wiener 1934)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{F}f \in L^2(\mathbb{R})$ sa transformée de Fourier. Alors on a l'équivalence*

$$f(x) = 0 \text{ pour presque tout } |x| > T \iff$$
$$\mathscr{F}f \text{ s'étend de } \mathbb{R} \text{ à } \mathbb{C} \text{ en une fonction entière de type exponentiel } T.$$

1) Prouver l'implication directe.

Dans les questions qui suivent, on montre l'implication indirecte du théorème. On suppose donc que les hypothèses sur $\mathscr{F}f$ à droite de l'équivalence sont vérifiées.

2) On pose

$$h(z) = \int_{-1/2}^{1/2} (\mathscr{F}f)(z+t)dt, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Justifier que h est une fonction entière de type exponentiel T. Montrer aussi que $\|h\|_2 \le \|\mathscr{F}f\|_2$ (utiliser Cauchy-Schwarz).

3) Soit $B > T$ et $g(z) = e^{iBz}h(z)$. Vérifier que g est de type exponentiel, bornée sur $\mathbb{R}$ et sur l'axe imaginaire positif $\{iy,\ y \ge 0\}$.

4) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|h(Re^{i\theta})| \le Ce^{BR\sin\theta}, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

5) Soient $A > 0$ et $x > B$ fixés. En appliquant le théorème de Cauchy sur le demi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur à la fonction $(1-Aiz)^{-1}e^{ixz}h(z)$, montrer que

$$\left|\int_{-R}^{R} \frac{e^{ixz}h(z)}{1-Aiz}dz\right| \to 0 \quad \text{quand} \quad R \to \infty.$$

6) En faisant tendre B vers T et A vers 0, en déduire que la transformée de Fourier inverse $\mathscr{F}^{-1}h$ s'annule pour $x > T$. Pour cela, utiliser, en le justifiant, que $(1-Aiz)^{-1}h(z)$ tend vers $h(z)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ quand A tend vers 0.

7) Par définition de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$, la fomule (3) s'écrit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(y)e^{-iy(x+t)}dydt,$$

où l'on rappelle que la limite est une limite dans $L^2(\mathbb{R})$. Justifier que l'on peut échanger la 1ere intégrale et la limite.

8) Justifier que

$$\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-R}^{R} f(y)e^{-iy(x+t)}dydt = \int_{-R}^{R}\int_{-1/2}^{1/2} f(y)e^{-iy(x+t)}dtdy.$$

9) En déduire la transformée de Fourier inverse de h, et conclure la preuve du théorème.