Université Aix-Marseille **2023–2024**

Agrégation Mathématiques
Devoir Surveillé Octobre 2023 (d'après le sujet d'analyse de 2022) – 5 heures

Problème

Introduction

Tous les résultats énoncés dans cette introduction peuvent être utilisés, sans justification, dans la suite du problème.

Pour $s \in \mathbb{R}$, on note $\mathbf{H_s}$ le demi-plan ouvert $\mathbf{H_s} = \{\mathrm{Re}(z) > s\}$. On note $\lceil x \rceil$ la partie entiere supérieure de x,

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z},\ x \leq k\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Fonction $\zeta(s)$: elle est définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}, \tag{1}$$

dans le domaine $\mathrm{Re}(s) > 1$, où elle est analytique. Elle vérifie

$$\zeta(\sigma) = \lim_{n \to \infty} \prod_{1 \leq k \leq n} (1 - p_k^{-\sigma})^{-1}, \quad \sigma > 1, \tag{2}$$

où on note $(p_k)_{k>0}$, l'indexation strictement croissante des nombres premiers.

Fonction Γ : elle est définie par

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt, \tag{3}$$

dans le domaine $\mathrm{Re}(s) > 0$ (où l'intégrale converge). Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, sans zéros, avec des pôles simples en $0, -1, -2, \ldots$ Elle vérifie

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

Soit $\sigma \in]1, \infty[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe une constante $C_{k,\sigma}$ qui ne dépend que de k et σ telle que

$$|\Gamma(s)| \leq \frac{C_{k,\sigma}}{(1 + |\mathrm{Im}(s)|)^k}, \quad s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) \in [1, \sigma]. \tag{4}$$

Fonction $\Lambda(n) : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$ définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{si } n = p^k \text{ pour un entier } p \text{ premier et un entier } k \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fonctions Z et Φ :

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-s}, \qquad \Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}, \qquad s \in \mathbf{H_1}.$$

Transformée de Mellin : Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Soit $s \in \mathbb{C}$. On définit la transformée de Mellin de φ par la formule

$$\mathscr{M}\varphi(s) = \int_0^\infty \varphi(x) x^{s-1} dx.$$

La formule (3) montre que la transformée de Mellin de e^{-x} est la fonction $\Gamma(s)$. La formule d'inversion de la transformée de Mellin est donnée par

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{M}\varphi(\sigma+it)x^{-\sigma-it}dt, \tag{5}$$

où $\sigma\in\mathbb{R}$ est tel que $\varphi(x)x^{\sigma-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le but du problème est de prouver que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Lambda(k)=1, \tag{6}$$

qui est l'étape principale pour obtenir le théorème des nombres premiers :

$$\#\{\text{nombres premiers inférieurs à } x\}\sim\frac{x}{\log x},\quad x\to\infty. \tag{7}$$

Pour une preuve que (6) entraine (7), on peut consulter la partie I-4 du sujet de 2022.

Partie 1

I-1) Montrer que

$$\log\zeta(\sigma)=-\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-p_n^{-\sigma}\right),\quad -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log p_n}{p_n^{\sigma}-1},\qquad \sigma>1. \tag{8}$$

I-2) Montrer que Φ est bien définie et analytique dans $\mathbf{H_1}$.

I-3) Montrer que

$$\Phi(\sigma)=-\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma),\qquad \sigma \text{ réel } >1.$$

Partie 2

II-1) Le but de ce groupe de questions est de montrer qu'il existe une fonction L holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$ telle que $\exp L(s)=\zeta(s)$ pour tout s dans $\mathbf{H}_1$.

II-1a) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}|Z(ks)|\leq\log\zeta(\mathrm{Re}(s)),\quad s\in\mathbf{H}_1.$$

On pose alors

$$\forall s\in\mathbf{H}_1,\quad L(s)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}Z(ks)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{kp_n^{ks}}.$$

II-1b) Montrer que L est holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$.

II-1c) Montrer que $\exp L(s)=\zeta(s)$ pour s dans $\mathbf{H}_1$. (calculer d'abord $\exp L(\sigma)$ pour σ dans $]1,+\infty[$).

II-1d) En déduire que ζ ne s'annule pas sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$.

II-1e) Montrer que $\Phi(s)=-\zeta'(s)/\zeta(s)$, $s\in\mathbf{H}_1$.

II-2) Le but de ce groupe de questions est de prolonger ζ en une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}_0\backslash\{1\}$. Pour cela, on introduit

$$\mathrm{v}_n(s)=\int_n^{n+1}\left(n^{-s}-x^{-s}\right)\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbf{N}^*,\quad s\in\mathbf{C}.$$

II-2a) Montrer que la série de terme général $(\mathrm{v}_n(s))_{n\in\mathbf{N}^*}$, $s\in\mathbf{H}_1$, est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{v}_n(s)=\zeta(s)-\frac{1}{s-1}.$$

II-2b) Montrer que

$$\mathrm{v}_n(s)=s\int_n^{n+1}(\lceil x\rceil-x)x^{-1-s}\,\mathrm{d}x,\quad s\in\mathbf{H}_0,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Montrer que la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $x\mapsto(\lceil x\rceil-x)x^{-1-s}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, puis que

$$\forall s\in\mathbf{H}_1,\quad \zeta(s)=\frac{1}{s-1}+s\int_1^{+\infty}(\lceil x\rceil-x)x^{-1-s}\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

II-2c) Montrer que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_0$ avec un unique pole simple en $s=1$. On notera encore ζ ce prolongement.

II-3) Dans ce groupe de questions, on montre que $\zeta(1+it)\neq 0$ pour tout t dans $\mathbf{R}^*$. On admet que

$$q(\theta)=5+8\cos(\theta)+4\cos(2\theta)+\cos(3\theta)\geq 0,\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

II-3a) Soient $\sigma\in]1,+\infty[$ et $t\in\mathbf{R}$. Montrer que

$$\zeta(\sigma)^5|\zeta(\sigma+it)|^8|\zeta(\sigma+2it)|^4|\zeta(\sigma+3it)|=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q(kt\log p_n)}{kp_n^{k\sigma}}\right).$$

En déduire que $\zeta(\sigma)^5|\zeta(\sigma+it)|^8|\zeta(\sigma+2it)|^4|\zeta(\sigma+3it)|\geq 1$.

II-3b) Supposons qu'il existe un réel non nul t_0 tel que $\zeta(1+it_0)=0$. Montrer que

$$\lim_{\sigma\to 1^+}\zeta(\sigma)\zeta(\sigma+it_0)=\zeta'(1+it_0).$$

En déduire une contradiction et conclure.

II-4) Soient $\sigma\in[1,+\infty[$ et un réel t tel que $|t|\geq 1$.

II-4a) à l'aide de (9), démontrer que $|\zeta(\sigma+it)|\leq|t|+2\leq 3|t|$

II-4b) Montrer de même que $|\zeta'(\sigma+it)|\leq 4|t|$.

II-5) Dans les questions suivantes, on montre l'existence d'un réel $M>0$ tel que

$$\forall\sigma\in[1,2],\ \forall t\in\mathbf{R}\text{ tel que }|t|\geq 1,\quad |\zeta(\sigma+it)|^{-1}\leq M|t|^{11/2} \tag{10}$$

Dans ce qui suit, t est un réel fixé tel que $|t|\geq 1$.

II-5a) Montrer que pour tout réel $\sigma\in[1,+\infty[$, on a

$$\frac{1}{\zeta(\sigma+it)}=\frac{1}{\zeta(\sigma+1+it)}+\int_{\sigma}^{\sigma+1}\frac{\zeta'(x+it)}{\zeta^2(x+it)}\mathrm{d}x. \tag{11}$$

II-5b) Soit σ dans $[1,+\infty[$. Montrer que $0\leq\zeta(\sigma+1)-1-2^{-1-\sigma}\leq\sigma^{-1}2^{-\sigma}$, par comparaison série-intégrale. En déduire que

$$1/4\leq|\zeta(\sigma+1+it)|, \tag{12}$$

(on pourra écrire que $|\zeta(\sigma+1+it)|\geq 1-|\zeta(\sigma+1+it)-1|$).

II-5c) En utilisant II-3a et les questions précédentes, montrer que

$$\forall x\in]1,3],\quad |\zeta(x+it)|^{-2}\leq 2.3^{11/4}|t|^{5/4}(x-1)^{-5/4}. \tag{13}$$

II-5d) Pour tout σ dans $]1,2]$, montrer que

$$|\zeta(\sigma+it)|^{-1} \leq 4+2^5 3^{11/4}|t|^{9/4}\left((\sigma-1)^{-1/4}-\sigma^{-1/4}\right) \leq 2^6 3^{11/4}|t|^{9/4}(\sigma-1)^{-1/4}.$$

II-5e) Conclure en réemployant cette inégalité : **Cette question était infaisable !** Vous pouvez donc admettre (10) dans la suite du sujet.

II-6) Montrer que Φ se prolonge continument à l'ensemble fermé $\{s \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(s) \geq 1 \text{ et } |\mathrm{Im}(s)| \geq 1\}$. Montrer ensuite que pour $\sigma \in [1,2]$ et tout réel t tel que $|t| \geq 1$ on a

$$|\Phi(\sigma+it)| \leq 4M|t|^{13/2},$$

où le réel M est celui introduit à la question II-5.

Partie 3

III-1) Soit $x > 0$. Montrer que la série de terme général $(e^{-nx}\Lambda(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge. Montrer que la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\Lambda(n), \qquad x > 0,$$

est continue.

III-2) Soit $\mathscr{M}\varphi$ la transformée de Mellin de φ,

$$\mathscr{M}\varphi(s) = \int_0^{\infty} \varphi(x)x^{s-1}dx, \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Montrer que $\mathscr{M}\varphi$ est bien définie (montrer la convergence absolue) et holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$. Donner une expression de $\mathscr{M}\varphi$ sur $\mathbf{H}_1$ (utiliser Fubini).

III-3) Soit $\sigma \in]1,2]$. Montrer que la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto \mathscr{M}\varphi(\sigma+it)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. (Indication : on pourra utiliser (4) et la question II-6.)

III-4) Déduire des questions précédentes que pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$ et tout σ dans]1, 2], on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)e^{-nx} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\sigma+it)\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}x^{-(\sigma+it)}\mathrm{d}t$$

III-5) Pour tout s dans $\mathbf{H}_1$, on pose

$$h(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}.$$

III-5a) Démontrer que h se prolonge continument à $\{s \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(s) \geq 1\}$. (Indication : on pourra utiliser le prolongement de la fonction $s \mapsto \zeta(s)-(s-1)^{-1}$ à $\mathbf{H}_0$ de la question II-2).

III-5b) Montrer l'existence d'un réel $K_1 > 0$ tel que

$$|h(\sigma+it)| \leq K_1\left(1+|t|^{13/2}\right), \quad \sigma \in [1,2],\ t \in \mathbb{R}.$$

III-5c) Montrer l'existence d'un réel $K_2 > 0$ tel que

$$|\Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)| \leq K_2(1+|t|)^{-3/2}, \quad \sigma \in [1,2],\ t \in \mathbb{R}.$$

Pour $x > 0$ et $\sigma \in [1,2]$, en déduire que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$t \mapsto \Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}$$

est intégrable sur $\mathbf{R}$.

III-5d) Pour $x > 0$, on pose $I(x) = x^{-1}e^{-x} - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)e^{-nx}$. Soit σ dans $]1,2]$. Montrer que

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}\mathrm{d}t$$

III-5e) Soit $x > 0$. Montrer que

$$xI(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(1+it)h(1+it)e^{-it\log x}\,\mathrm{d}t.$$

III-6) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} xI(x) = 0$.

III-7) Montrer (6) en utilisant le théorème suivant, que l'on admet,

Theorem 1. *Soit $(a_n)_{n>0}$ et $(\lambda_n)_{n>0}$, deux suites de nombres réels ≥ 0, avec la 1ere non identiquement nulle, et la 2ieme strictement croissante, tendant vers l'infini. On suppose que pour tout $\sigma > 0$, la série $D(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma}$ converge, et*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{D(p\sigma)}{D(\sigma)} = \frac{1}{p}.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{D(\lambda_n^{-1})} \sum_{k=1}^{n} a_k = 1.$$