Agrégation Mathématiques
Devoir Surveillé Octobre 2024
Documents et calculatrices non autorisés

Notations

$\mathbb{D}$: disque unité ouvert,

$\mathcal{O}(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{C}$: le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions holomorphes sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$, munit de la topologie de convergence uniforme sur tout compact de Ω .

Définition : Une application conforme d'un ouvert U dans un ouvert V est une bijection holomorphe $U \rightarrow V$.

Rappels de cours et résultats complémentaires

Théorème 1 : Soit Ω un ouvert simplement connexe et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors f admet une primitive dans Ω .

Lemme de Schwarz : 1) Soit f holomorphe dans le disque ouvert $\mathbb{D} = D(0, 1)$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ sur $\mathbb{D}$ alors $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.

2) Si $|f(z_0)| = |z_0|$ pour un $z_0 \in \mathbb{D}^*$ ou $|f'(0)| = 1$ alors il existe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$.

Théorème 2 de Rouché : Soient f et g holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ et soit D un disque ouvert tel que $\bar{D} \subset U$. Si

$$\forall z \in \partial D, \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

alors f et g ont le même nombre de zéros dans D .

Théorème 3 de l'application ouverte : Soit G un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in H(G)$ non constante. Alors f est ouverte, c'est-à-dire que l'image par f de tout ouvert U de G est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Théorème 4 : Soit G ouvert et $f \in \mathcal{O}(G)$ injective. Alors f' ne s'annule pas dans G .

Théorème 5 : Tout automorphisme de $\mathbb{D}$ est de la forme $e^{i\theta} \varphi_\alpha(z)$, $\alpha \in \mathbb{D}$, avec

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}. \tag{1}$$

Théorème 6 de Montel : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et A un sous-ensemble de $\mathcal{O}(\Omega)$. On suppose que, pour tout K compact de Ω , il existe $C_K > 0$ tel que

$$\forall f \in A, \quad \sup_{z \in K} |f(z)| \leq C_K.$$

Alors, de toute suite de A on peut extraire une sous-suite convergente vers une limite $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ et la convergence est uniforme sur les compacts de Ω .

Théorème 7 de Fatou : Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. soient $f_n : E \rightarrow [0, \infty]$ mesurables, on a

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Exercices

1. Soit f une fonction entière non constante. Montrer que son image est dense dans $\mathbb{C}$ (raisonner par l'absurde).
2. Montrer que la fonction $\bar{z}$ ne peut pas être approchée par des polynômes sur le cercle $|z| = 1$ (raisonner par l'absurde et trouver une contradiction avec le principe du maximum).
3. Soit f analytique dans $\mathbb{D}$, qui tend vers 0 en tout point du cercle unité. Montrer que f est nulle (penser à la formule de Cauchy).

Exercice sur les séries entières (Agreg Docteurs 2024)

Soient $\sum_n a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières à coefficients réels de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note respectivement f et g leurs sommes sur l'intervalle $] - 1, 1[$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad m_n = \frac{s_0 + \dots + s_n}{n+1}.$$

On suppose que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives et que $\sum b_n$ diverge.

1. Montrer $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$.
2. Soit $A \in \mathbb{R}$. On suppose que $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs supérieures à A à partir d'un certain rang. Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta \in]0, 2[, \quad \forall x \in]1 - \eta, 1[, \quad \frac{f(x)}{g(x)} > A - \varepsilon.$$

3. En déduire que si $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie ou infinie dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

4. Montrer, pour x dans $] - 1, 1[$,

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) m_n x^n.$$

En déduire que si $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim m_n$.

Problème 1 : Calcul des valeurs $\zeta(2p)$ par les résidus

On sait que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Plus généralement, on se propose de calculer $\zeta(2p)$, $p \in \mathbb{N}^*$, par la formule des résidus. On pose

$$f(z) = \frac{\cotg(z)}{z^{2p}}.$$

1. Déterminer les poles de f , différents de 0, et calculer leur résidu.
2. Montrer que

$$\cotg(z) = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1}.$$

3. Par définition, les nombres de Bernoulli B_k , $k \in \mathbb{N}$, sont les nombres tels que

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k.$$

Calculer B_0, B_1 et B_2 .

4. Calculer le résidu de f en 0 en fonction d'un nombre de Bernoulli.

5. Soit γ le rectangle, parcouru dans le sens positif, dont les cotés verticaux passent, respectivement, par les points $(N+1/2)\pi$ et $-(N+1/2)\pi$ où $N \in \mathbb{N}^*$, et les cotés horizontaux passent, respectivement, par Ni et $-Ni$. Ecrire la formule pour l'intégrale de f sur γ (formule des résidus).

6. Montrer que l'intégrale de f sur les cotés horizontaux de γ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$ (étudier le comportement de $\cotg z$).

7. Montrer, de même, que l'intégrale de f sur les cotés verticaux de γ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$.

8. En déduire la valeur de $\zeta(2p)$, $p \geq 1$, en fonction du nombre de Bernoulli B_{2p} .

9. Vérifier que la formule obtenue est correcte pour $p = 1$.

Problème 2 : Théorème de Riemann sur les applications conformes

Le but du problème est de prouver le théorème suivant :

Théorème (énoncé par Riemann, 1851) : Soit Ω un ouvert connexe, simplement connexe de $\mathbb{C}$, différent de $\mathbb{C}$. Alors il existe une application conforme de Ω vers $\mathbb{D}$.

On prouve d'abord quatre résultats préliminaires.

1. Soit Ω un ouvert simplement connexe et f holomorphe dans Ω , qui ne s'annule pas. Montrer qu'il existe $g \in H(\Omega)$ telle que $e^g = f$ (considérer une primitive de f'/f).

2. Avec les mêmes hypothèses que dans la question précédente, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $h \in H(\Omega)$ telle que $h^n = f$.

3. Soit Ω un ouvert connexe, et f_n une suite de $H(\Omega)$, où chaque f_n est sans zéro dans Ω , qui converge, uniformément sur les compacts de Ω , vers $f \in H(\Omega)$. Montrer que $f = 0$ ou f est sans zéro dans Ω .

4. Soit Ω un ouvert connexe, et f_n une suite de $H(\Omega)$, où chaque f_n est injective dans Ω , qui converge, uniformément sur les compacts de Ω , vers $f \in H(\Omega)$. Déduire de la question précédente que f est soit constante, soit injective.

Dans la suite, Ω est un ouvert connexe, simplement connexe de $\mathbb{C}$, différent de $\mathbb{C}$. On fixe $p \in \Omega$ et on pose

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{D} \text{ injective, } f(p) = 0\}.$$

5. Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Justifier qu'il existe $g \in H(\Omega)$ telle que $g^2(z) = z - q$.

6. Justifier que g est injective et $g(\Omega) \cap (-g(\Omega)) = \emptyset$.

7. Justifier qu'il existe un disque $D(\xi, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - \xi| < r\}$ inclu dans $\mathbb{C} \setminus g(\Omega)$. En utilisant la fonction

$$f(z) = \frac{r}{g(z) - \xi}$$

et le Théorème 5, montrer que $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

8. Soit $f \in \mathcal{F}$. On suppose dans la suite que f n'est pas surjective. Soit $q \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$ et φ_q définie comme dans (1). Justifier qu'il existe $g \in H(\Omega)$ telle que $g^2 = \varphi_q \circ f$ avec $g(\Omega) \subset \mathbb{D}$ et g injective.

9. Soit $h = \varphi_{g(p)} \circ g \in \mathcal{F}$. En écrivant que $\varphi_q \circ f = (\varphi_{-g(p)} \circ h)^2$ et en dérivant cette égalité, montrer que

$$|f'(p)| < |h'(p)|.$$

10. Soit f_n une suite dans $\mathcal{F}$ telle que $|f'_n(p)| \rightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(p)|$. Justifier que l'on peut extraire de f_n une sous-suite qui converge sur les compacts de Ω vers une limite $F \in \mathcal{F}$.

11. En déduire le théorème de Riemann.

12. Montrer qu'il existe une application conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ avec $f(p) = 0$ et $f'(p) > 0$, et qu'elle est unique.

Les deux questions suivantes concernent des applications du théorème de Riemann.

13. Soit Ω un ouvert, connexe, simplement connexe de $\mathbb{C}$, différent de $\mathbb{C}$, et soit $u, v \in \Omega$. Montrer qu'il existe $f : \Omega \rightarrow \Omega$ conforme telle que $f(u) = v$ (en fait, c'est vrai aussi lorsque $\Omega = \mathbb{C}$).

14. Soit Ω un ouvert, connexe, simplement connexe de $\mathbb{C}$, différent de $\mathbb{C}$, et soit $u \neq v \in \Omega$. Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega$ holomorphe avec $f(u) = u$ et $f(v) = v$. Montrer que $f(z) = z$. Montrer que ce n'est pas vrai si $\Omega = \mathbb{C}$.

15. Montrer qu'il n'existe pas d'application conforme du disque épointé $\mathbb{D}^*$ dans la couronne ouverte $C(1, 2)$ limitée par les cercles de rayons 1 et 2. On pourra utiliser qu'il n'existe pas de fonction h holomorphe dans $C(1, 2)$ telle que $h^2(z) = z$ (on ne demande pas de le justifier).

16. Prouver le Théorème 4. Pour cela, supposer par l'absurde qu'il existe $z_0 \in G$ avec $f'(z_0) = 0$. On pourra utiliser que le nombre de zéros de la fonction $f(z) - f(z_0)$ dans un disque $D(z_0, r)$ est donné par $h(z_0)$, avec

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f'(t)}{f(t) - f(z)} dt.$$