Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

PAN Math 206 **Année 2006-2007**

Devoir surveillé de Probabilité et Analyse Numérique
27 mars 2007
Durée : 2 heure 30
Les parties Probabilité et Analyse Numérique sont à rédiger sur des copies séparées

---

Partie II : Analyse numérique
Les calculatrices et les documents sont interdits.

Exercice 1.

1) Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ points dans $\mathbb{R}$. Donner les formules définissant les polynômes $L_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$, de la base de Lagrange associée à ces points.

2) Soit $p_n(x)$ le polynôme qui interpole les points (x_0, y_0),...,(x_n, y_n). A l'aide des polynômes de Lagrange précédents, donner une expression pour $p_n(x)$.

3) Soit p_3 le polynôme qui interpole les 4 points $(0, y_0)$,...,$(3, y_3)$. En utilisant la formule précédente, exprimer $p_3(6)$.

4) On suppose que les valeurs $y_0, \ldots, y_3$, sont connues à ϵ près. Quelle est l'incertitude sur $p_3(6)$, autrement dit, à combien près est connu $p_3(6)$?

5) On suppose que $y_i = f(i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, avec $f(x) = (x-3)^3$. Que vaut alors $p_3(x)$? (cela n'utilise pas la question 2.). Vérifier sur cet exemple que votre réponse à la question 3. est correcte.

Exercice 2.

1) Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ points dans $\mathbb{R}$ et p_n le polynôme qui interpole une fonction f en ces points. Rappeler la formule de Newton pour p_n.

2) En appliquant la formule précédente, calculer le polynôme P passant par les points $(-2, 9)$, $(-1, 4)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$.

Exercice 3. Soit $f(x) = xe^{ax^2}$, où $a \in [0, 1]$ est un paramètre, et soit

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Soit $I_1(f)$, l'approximation de $I(f)$ obtenue par application de la méthode des trapèzes.

1) D'après le cours, par quelle quantité peut-on majorer $|I(f) - I_1(f)|$? Calculer cette quantité dans le cas présent.

2) Calculer $I(f)$ et $I_1(f)$. Y a-t-il une valeur de $a \in [0,1]$ pour laquelle $I_1(f) = I(f)$?

3) Pour quelle valeur de $a \in [0,1]$, la distance $|I(f) - I_1(f)|$ est-elle la plus grande ? Expliquer (on pourra utiliser le fait que 2 dérivées bien choisies sont positives).