Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

PAN Math 206 **Année 2007-2008**

Devoir surveillé de Probabilité et Analyse Numérique
1er Avril 2008
Durée : 2 heure
Les parties Probabilité et Analyse Numérique sont à rédiger sur des copies séparées

---

Partie I : Analyse numérique

Les calculatrices et les documents sont interdits.

Exercice 1. (Question de cours)

1) Rappeler les formules définissant les polynômes de Lagrange.

2) Rappeler la majoration de l'erreur dans la méthode d'intégration numérique de Simpson. Calculer ce majorant dans le cas de l'intégrale

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x}dx.$$

Exercice 2.

1) Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ points dans $\mathbb{R}$ et p_n le polynôme qui interpole une fonction f en ces points. Rappeler la formule de Newton pour p_n.

2) En appliquant la formule précédente, calculer le polynôme P passant par les points $(-1,-12)$, $(0,-4)$, $(1,-6)$, $(2,-6)$. On fera la table des différences divisées.

3) Donner l'expression de P dans la base des monômes 1, x, x^2, x^3.

Exercice 3. Soit $r(x)$, le polynôme trigonométrique de degré n,

$$r(x) = \sum_{p=-n}^{n} c_p e^{ipx}.$$

1) Calculer

$$I(r) = \int_0^{2\pi} r(x)dx.$$

2) On considère la méthode des trapèzes composite appliquée sur une subdivision de $[0, 2, \pi]$ en sous-intervalles de longueurs $\frac{2\pi}{n+1}$. Soit $I_T(r)$, l'approximation de $I(r)$ obtenue par cette méthode. Montrer que

$$I_T(r) = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} r\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right).$$

3) Soit p un nombre entier. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} e^{\frac{2kip\pi}{n+1}}.$$

4) En déduire que $I_T(r) = I(r)$.

5) Soit f une fonction quelconque définie sur $[0, 2\pi]$. Montrer que

$$I(f) - I_T(f) = I(f - r) + I_T(r - f).$$

6) On suppose que la fonction f peut être approchée par un polynône trigonométrique de degré n à moins de ϵ sur $[0, 2\pi]$. Montrer que la méthode des trapèzes précédente fournit une erreur inférieure à $4\pi\epsilon$ pour $I(f)$.