Agrégation Mathématiques
Devoir Surveillé Novembre 2010

Durée: 3 heures — Documents et calculatrices non autorisés

Problème 1 : Approximation de fonctions continues : Théorème de Jackson

On s'intéresse d'abord à l'approximation des fonctions périodiques par les polynômes trigonométriques de degré n , c'est à dire les fonctions de la forme

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique et soit K_n un polynôme trigonométrique de degré n , tel que $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 2\pi$. On introduit la fonction $J_{f,n}$ obtenue par convolution

$$J_{f,n}(\theta) = (f * K_n)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) K_n(t) dt.$$

Si f est constante, que peut-on dire de $J_{f,n}$?

2. Montrer que si K_n est un polynôme trigonométrique de degré n alors $J_{f,n}$ en est un aussi.

3. On suppose que f est lipschitzienne de rapport λ :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|.$$

On considère la norme du sup $\|f - J_{f,n}\|$ sur $[-\pi, \pi]$. Majorer $\|f - J_{f,n}\|$ en fonction de $\int_{-\pi}^{\pi} |t K_n(t)| dt$ et de λ .

4. On suppose dans toute la suite que

$$K_n(t) = \alpha_n \left(\frac{\sin(mt/2)}{m \sin(t/2)} \right)^4,$$

où α_n est une constante telle que $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 2\pi$ et $m = [n/2] + 1$, $[x]$ désignant la partie entière de x . On admet que K_n est un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$. Soit

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |t| \left(\frac{\sin(mt/2)}{m \sin(t/2)} \right)^4 dt.$$

En utilisant l'inégalité $\sin u \geq 2u/\pi$ valable pour $u \in [0, \pi/2]$, montrer que

$$I_1 \leq \frac{8}{m^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 v}{v^3} dv.$$

5. En découpant l'intégrale de droite en deux et en utilisant que $\sin v \leq v$ pour $v \in [0, 1]$, montrer que

$$I_1 \leq \frac{8}{m^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4.$$

6. Soit

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(mt/2)}{m \sin(t/2)} \right)^4 dt.$$

En utilisant l'inégalité $\sin u \leq u$ valable pour $u \in [0, \pi/2]$, montrer que

$$I_2 \geq \frac{4}{m} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 v}{v^4} dv.$$

En utilisant à nouveau l'inégalité $\sin u \geq 2u/\pi$ pour $u \in [0, \pi/2]$, en déduire que

$$I_2 \geq \frac{4}{m} \left(\frac{2}{\pi}\right)^3.$$

7. Déduire des résultats précédents qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f - J_{f,n}\| \leq C\lambda/n.$$

8. On suppose maintenant que f est seulement continue, et on définit son module de continuité $\omega_f(t)$ pour $t \geq 0$ par

$$\omega_f(t) = \sup \{|f(x) - f(y)|, |x - y| \leq t\}.$$

Montrer que ω_f est une fonction croissante de t et que

$$\omega_f(t + t') \leq \omega_f(t) + \omega_f(t').$$

9. Montrer également que, pour n entier positif,

$$\omega_f(t) \leq (nt + 1)\omega_f(1/n).$$

10. En déduire que pour f continue, il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\|f - J_{f,n}\| \leq C'\omega_f(1/n).$$

11. On considère à présent une fonction g continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f(\theta) = g(\cos \theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Montrer que

$$\omega_f(t) \leq \omega_g(t), \quad t \geq 0.$$

12. En utilisant la fonction f et les résultats précédents, montrer qu'il existe un polynôme P , de degré au plus n , tel que

$$\|g - P\| \leq C\omega_g(1/n),$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme du sup sur $[-1, 1]$ et C est une constante indépendante de g . On pourra remarquer que si f sur $[-\pi, \pi]$ est paire alors $J_{f,n}$ l'est aussi.

Problème 2 : Convergence locale de la méthode de Newton

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ et B la boule fermée $B_f(x_0, r)$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . On considère la méthode de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1}f(x_n).$$

On suppose que :

- (a) $\forall x, y \in B, \quad \|f'(x) - f'(y)\| \leq \gamma\|x - y\|,$
- (b) $\forall x \in B, f'(x)$ est inversible et $\|f'(x)^{-1}\| \leq \beta,$
- (c) $\alpha = \|x_1 - x_0\| < 2r/(2 + \beta\gamma r),$

et on admet que

$$\forall x, y \in B, \quad \|f(x) - f(y) - f'(y)(x - y)\| \leq \frac{\gamma}{2}\|x - y\|^2.$$

1. Montrer par récurrence que

$$\forall n \geq 0, \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha h^{2^n-1},$$

où h est un réel strictement inférieur à 1, dont on précisera la valeur en fonction de α , β et γ .

2. Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \|x_n - x_0\| \leq \frac{\alpha}{1 - h}.$$

3. En déduire que $x_n \in B$ pour tout $n \geq 0$.

4. Montrer que la suite (x_n) converge vers un élément $\xi \in B$ tel que $f(\xi) = 0$.

5. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a

$$\|x_n - \xi\| \leq \alpha \frac{h^{2^n-1}}{1 - h^{2^n}}.$$

On pourra utiliser que $2^k - 1 \geq k$ pour $k \geq 0$.