Université Aix-Marseille **2016-2017**

Agrégation Mathématiques
Devoir Surveillé Novembre 2016
Durée: 4 heures — Documents et calculatrices non autorisés

Problème 1

1. Soit $z = x + iy$. Montrer que

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y,$$
$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y.$$

2. Quels sont les zéros des fonctions $\sin az$ et $\cos az$, où $a \in \mathbb{R}^*$?

3. Soit $-\pi < a < \pi$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leq \frac{\cosh ay}{\cosh \pi y}, \qquad \text{pour } z = n + \frac{1}{2} + iy,$$

et que

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leq \frac{\cosh a(n+1/2)}{\sinh \pi(n+1/2)}, \qquad \text{pour } z = x + i\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

4. Montrer que la fonction $\pi \cot \pi z$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$, qu'elle a des poles simples aux points $z = n$, n entier, et que le résidu au pole $z = n$ égal 1, pour tout n.

5. Soit $f(z) = P(z)/Q(z)$ une fonction rationnelle telle que $\deg Q > \deg P + 1$, et soit $a_1, \ldots, a_m$, ses poles, et $b_1, \ldots, b_m$, les résidus correspondants. On suppose que les a_q, $1 \leq q \leq m$, ne sont pas entiers. Soit γ_n le périmètre du carré de sommets $\pm(n+1/2) \pm (n+1/2)i$, où n est un entier ≥ 1. Montrer qu'il existe deux nombres réels positifs M_1 et K, indépendants de n, tels que

$$|\pi \cot \pi z| \leq M_1 \quad \text{sur} \quad \gamma_n, \tag{1}$$

$$|f(z)| \leq K/|z|^2 \quad \text{pour } |z| \text{ suffisamment grand.} \tag{2}$$

6. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f(z) \cot \pi z dz = 0,$$

et que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n \leq p \leq n} f(p) = - \sum_{1 \leq q \leq m} b_q \pi \cot \pi a_q.$$

7. Explicitez la formule précédente dans le cas suivant :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(a+bn^2)},$$

où a, b sont deux nombres réels > 0.

8. Montrer que les résultats de 6. restent valables si on a seulement $\deg Q > \deg P$. On pourra montrer que $f(z) = g(z) + c/z$ où c est une constante et $g(z)$ une fonction rationnelle qui satisfait les conditions de 5., puis que

$$\int_{\gamma_n} \frac{\cot \pi z}{z} dz = 0.$$

9. Calculer $\lim_{n\infty} \sum_{-n\leq p\leq n} (x-p)^{-1}$, et en déduire la valeur de $\sum_{p\geq 1}(x^2-p^2)^{-1}$ lorsque x n'est pas entier.

10. Soit $-\pi < \alpha < \pi$. Montrer que

$$\lim_{n\infty} \int_{\gamma_n} \frac{e^{i\alpha z}}{z \sin \pi z} dz = 0.$$

On pourra se ramener à une intégrale sur le coté droit γ_n' du carré γ_n et une intégrale sur le coté supérieur γ_n'' de γ_n, puis utiliser la question 3.

11. On admet qu'il existe un nombre réel positif M_2, indépendant de n, tel que

$$\left| \frac{e^{i\alpha z}}{\sin \pi z} \right| \leq M_2 \quad \text{sur } \gamma_n.$$

En déduire que, si $f(z)$ est une fonction rationnelle comme dans 8., alors

$$\lim_{n\infty} \sum_{-n\leq p\leq n} (-1)^p f(p) e^{i\alpha p} = -\pi \sum_{1\leq q\leq m} b_q \frac{e^{i\alpha a_q}}{\sin \pi a_q}.$$

12. Soit $f(z) = (x-z)^{-1}$. Montrer que, pour $-\pi < \alpha < \pi$,

$$\sum_{p\geq 1} (-1)^p \frac{\cos \alpha p}{x^2 - p^2} = \frac{\pi \cos \alpha x}{2x \sin \pi x} - \frac{1}{2x^2},$$
$$\sum_{p\geq 1} (-1)^p \frac{\sin \alpha p}{x^2 - p^2} = \frac{\pi \sin \alpha x}{2 \sin \pi x},$$

pour $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Problème 2

Un isomorphisme entre deux ouverts U et V de $\mathbb{C}$ est une application $f : U \to V$, bijective, telle que f et f^{-1} soient holomorphes. On appelle automorphisme de U un isomorphisme entre U et U.

On rappelle (ou on admet) le théorème de Picard : si une fonction f analytique dans $0 < |z| < 1$, admet l'origine comme singularité essentielle, alors, pour tout $\epsilon > 0$, $f(\{0 < |z| < \epsilon\})$ est $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}$ privé d'un point.

1. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C}$. Montrer que f est de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ (on montrera, à l'aide du théorème de Picard, que l'application $z \mapsto f(1/z)$ ne peut avoir 0 comme singularité essentielle, et donc que f est un polynôme).

2. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C}^*$.
(a) Montrer, en appliquant le théorème de Picard, que f est de la forme suivante, pour $z \neq 0$,

$$f(z) = a_m z^m + \cdots + a_M z^M, \qquad M \in \mathbb{Z},\ m \leq M,\ a_m a_M \neq 0,$$

(on pourra distinguer 2 cas suivant que f se prolonge ou pas en 0).

(b) Montrer que le polynôme $z^{-m} f(z)$ est nécessairement constant.

(c) Montrer que les seuls automorphismes de $\mathbb{C}^*$ sont $z \mapsto a/z$ et $z \mapsto bz$, avec $a, b \in \mathbb{C}^*$.

(d) Décrire tous les isomorphismes entre $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$.

3. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ qui vérifie la propriété (A) suivante :

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}, \quad \lim_{z \to 0} f(z) = \alpha.$$

(a) Montrer que nécessairement $\alpha = 0$ ou 1 (si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, utiliser un voisinage de $f^{-1}(\alpha)$ pour contredire l'injectivité de f).

(b) Si $\alpha = 0$, montrer que f se prolonge en un automorphisme g de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ vérifiant $g(0) = 0$. Quelles sont les formes de f dans ce cas-là ?

(c) Si $\alpha = 1$, raisonner de facon analogue et donner les formes possibles de f dans ce cas-là.

4. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
(a) Montrer que $1/f$ est un automorphisme de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et que, si f ne vérifie pas (A), alors $1/f$ vérifie (A) avec $\alpha = 0$ (utiliser le théorème de Picard).

(b) En déduire la liste de tous les automorphismes de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

5. On dit qu'un ouvert U est homogène si :

$$\forall x, y \in U, \quad \exists f \in \operatorname{Aut} U, \quad f(x) = y.$$

Les ensembles $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ sont-ils homogènes ?