Université Aix-Marseille **2017-2018**

Agrégation Mathématiques
Devoir Surveillé Novembre 2017
Durée : 4 heures — Documents et calculatrices non autorisés

Problème 1 : Développement de $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ et produit infini d'Euler

1. Montrer la convergence uniforme de la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n},$$
sur les compacts de $\mathbb{C}$, privés des points de $\mathbb{N}^*$ (regarder les sommes partielles pour les indices pairs).

2. On pose $f(w) = \frac{\pi}{\sin \pi w}$. Soit $z \notin \mathbb{Z}$ fixé, soit $N > |z| - \frac{1}{2}$ et $\mathscr{R}_N$ le carré $\{|x| \leqslant N + \frac{1}{2}, |y| \leqslant N + \frac{1}{2}\}$, et $C_N = \partial \mathscr{R}_N$ son bord parcouru dans le sens direct. Exprimer
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z} dw$$
à l'aide du théorème des résidus.

3. Montrer $\int_{C_N} \frac{f(w)}{w} dw = 0$ (par un argument simple...) et en déduire :
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{\pi}{\sin \pi w} \frac{z}{w(w-z)} dw.$$

4. Soit $w = x + iy \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$|\sin w|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y.$$
En déduire que
$$|\sin(\pi w)| = \mathrm{ch}(\pi y) \geqslant 1 \text{ sur les bords verticaux du carré et}$$
$$|\sin(\pi w)| \geqslant \mathrm{sh}(\pi(N + \frac{1}{2})) \geqslant \mathrm{sh}(\frac{\pi}{2}) = 2.301\ldots \geqslant 1 \text{ sur les bords horizontaux.}$$
Prouver le développement
$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$$
avec convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{C}$, privés des points de $\mathbb{Z}$.

5. On admet dans la suite que
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \lim_{N \to \infty} \sum_{-N \leqslant n \leqslant N} \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$
avec convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{C}$, privés des points de $\mathbb{Z}$ (la formule se prouve en suivant la même technique que précédemment). On veut maintenant prouver que
$$\sin(\pi z) = \lim_{N \to \infty} \pi z \prod_{n=1}^{N} (1 - \frac{z^2}{n^2}). \tag{1}$$

On fixe dans toute la suite $R > 0$, et on va montrer la formule pour $|z| < R$. Soit N avec $N > R$ et notons

$$f_N(z) = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \prod_{n=1}^{N} (1 - \frac{z^2}{n^2}),$$

prolongé par continuité en les n, $|n| \leqslant N$. Montrer que f_N est holomorphe et ne s'annule pas sur $D(0,R)$.

6. Soit un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ et

$$F(t) = \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \frac{dw}{w}, \quad t \in [0,1].$$

Montrer que la fonction $\gamma(t)e^{-F(t)}$ est constante, et donc que $\gamma(1) = \gamma(0) \exp\left(\int_\gamma \frac{dw}{w}\right)$.

7. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ le chemin $\gamma(t) = f_N(tz)$. Montrer que

$$f_N(z) = \exp\left(\int_0^1 \frac{f_N'(tz)}{f_N(tz)} z dt\right).$$

8. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant la convergence uniforme pour $|z|$ borné du développement en fractions de $\pi \operatorname{cotg}(\pi z)$, montrer que pour N suffisamment grand, on a $|f_N'(w)| \leqslant \varepsilon |f_N(w)|$ pour tout $w \in D(0,R)$, puis en déduire, pour $|z| < R$,

$$|f_N(z)| \leqslant e^{\varepsilon |z|} \leqslant e^{\varepsilon R}, \qquad \text{pour } N \text{ grand.}$$

9. En déduire $\lim_{N\to\infty} f_N(z) = 1$, uniformément sur $D(0,R)$ et conclure la preuve de (1). On rappelle (ou on admet) le théorème de Montel : Soit Ω un ouvert, $\mathscr{F}$ une famille de fonctions dans $H(\Omega)$, uniformément bornée sur les compacts de Ω :

$$\forall K \text{ compact de } \Omega,\ \exists M_K,\ \forall f \in \mathscr{F},\ \forall z \in K,\ |f(z)| \leqslant M_K.$$

Alors de toute suite de $\mathscr{F}$, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts de Ω.

Problème 2 : Produits infinis et Applications

1. Soient $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{C}$. On pose

$$p_N = \prod_{n=1}^{N} (1 + u_n), \qquad p_N^* = \prod_{n=1}^{N} (1 + |u_n|).$$

Montrer que

$$p_N^* \leqslant \exp(|u_1| + \cdots + |u_N|),$$

puis, par récurrence, que

$$|p_N - 1| \leqslant p_N^* - 1.$$

2. Soient $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble $S \subset \mathbb{C}$, à valeurs complexes, bornées, telles que $\sum |u_n(s)|$ converge uniformément sur S vers une fonction u. Montrer que u est bornée sur S et en déduire que $p_N(s) = \prod_{n=1}^{N} (1 + u_n(s))$ vérifie

$$\exists C > 0, \quad \forall N \geqslant 1, \quad \forall s \in S, \quad |p_N(s)| \leqslant C.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $e^{\varepsilon} - 1 \leqslant 2\varepsilon$, et soit N_0 tel que, pour tout $s \in S$, $\sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n(s)| \leqslant \varepsilon$. Montrer que

$$\forall M \geqslant N_0,\ \forall s \in S, \quad |p_M(s) - p_{N_0}(s)| \leqslant 2\varepsilon |p_{N_0}(s)| \leqslant 2\varepsilon C.$$

4. En déduire que p_N converge uniformément vers une fonction f sur S et que $f(s_0) = 0$ pour un $s_0 \in S$ si et seulement si $1 + u_n(s_0) = 0$ pour un certain n.
5. On rappelle (ou on admet) que si f_n est une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω (on note $f_n \in H(\Omega)$) telle que $f_n \to f$ uniformément sur les compacts de Ω, alors la limite f est aussi holomorphe sur Ω. En déduire, avec la question précédente, que si $f_n \in H(\Omega)$ est telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

converge uniformément sur les compacts de Ω, alors

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformément sur les compacts de Ω, $f \in H(\Omega)$, et f ne s'annule que si l'une des f_n s'annule.
6. Soit $0 \leqslant u_n < 1$. Montrer que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty.$$

Pour l'implication directe, on pourra utiliser une minoration élémentaire de e^x.
7. Dans la suite, on note $\mathbb{D}$ le disque ouvert $\{z,\ |z| < 1\}$, $\overline{\mathbb{D}}$ le disque fermé $\{z,\ |z| \leqslant 1\}$, et $\partial\mathbb{D}$ la frontière $\{z,\ |z| = 1\}$. Soit $E(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions complexes, continues sur $\overline{\mathbb{D}}$, holomorphes dans $\mathbb{D}$, de module 1 sur $\partial\mathbb{D}$. Pour $a \in \mathbb{D}$, on définit la fonction

$$g_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}.$$

Montrer que $g_a \in E(\mathbb{D})$ et que toute fonction $g \in E(\mathbb{D})$ est, à une constante multiplicative près, un produit fini de fonctions g_a (étudier pour cela les zéros de la fonction g).
8. Soit $0 < r < R$ et f holomorphe dans le disque $|z| < R$, bornée en module par M sur le disque $|z| \leqslant r$. Soit $k \geqslant 0$ l'ordre de multiplicité de 0 en tant que zéro de f, et $a_1, \ldots, a_n$ des zéros non nuls de f dans $D(0, r)$. Montrer que

$$M|a_1| \ldots |a_n| \geqslant \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} r^{n+k}.$$

Pour cela, on écrira la fonction $f(rz)$ sous la forme

$$f(rz) = z^k g_{a_1/r}(z) \ldots g_{a_n/r}(z) h(z).$$

9. Soit $B(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions complexes, holomorphes et bornées dans $\mathbb{D}$. Soit $f \in B(\mathbb{D})$, $M = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$, et $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, les zéros non nuls de f (répétés suivant leur multiplicité). Soit $k \geqslant 0$ l'ordre de multiplicité de 0 en tant que zéro de f. Montrer que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad M|a_1| \ldots |a_n| \geqslant \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}. \tag{2}$$

Déduire de (2) que le produit $\prod_1^{\infty} |a_i|$ converge vers une limite non nulle.

10. Trouver une réciproque en étudiant le produit de fonctions

$$G(z) = \prod_{1}^{\infty} \frac{|a_i|}{a_i} g_{a_i}(z).$$

Pour cela, il faudra utiliser les questions 5 et 6, ainsi que la majoration

$$\left| \frac{a+|a|z}{a(1-\overline{a}z)} \right| \leqslant \frac{1+r}{1-r}, \qquad a, z \in \mathbb{C},\ |a| < 1,\ |z| \leqslant r < 1,$$

qu'il faudra justifier.

11. Soit f une fonction entière telle que

$$\exists A > 0, \quad \exists 0 \leqslant B \leqslant 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leqslant Ae^{B|z|}.$$

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 0$. Montrer que f est nulle. On utilisera la question 8. On rappelle la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad \text{quand } n \to \infty.$$