**Université Aix-Marseille** **2018–2019**

**Agrégation Mathématiques**
**Devoir Surveillé Octobre 2018**
**Documents et calculatrices non autorisés**

**On rappelle les deux théorèmes suivants** :

**Holomorphie des intégrales à paramètre** : Soient $(\Omega, \mu)$ un espace mesuré, et $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$.
Soit $f(t,z) : \Omega \times U \to \mathbb{C}$ telle que :
i. Pour tout $z \in U$, $t \mapsto f(t,z)$ est mesurable
ii. Pour presque tout $t \in \Omega$, $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe
iii. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega, \mu)$ telle que

$$\forall (t,z) \in \Omega \times U, \quad |f(t,z)| \leqslant g(t).$$

Alors l'application

$$F : z \mapsto \int_\Omega f(t,z) d\mu(t)$$

est holomorphe dans $U$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z) = \int_\Omega \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(t,z) d\mu(t).$$

**Théorème de Montel** : Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $A \subset \mathscr{O}(\Omega)$, l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\Omega$. On suppose que, pour tout $K$ compact de $\Omega$, il existe $C_K > 0$ tel que

$$\forall f \in A, \qquad \sup_{z \in K} |f(z)| \leqslant C_K.$$

Alors, de toute suite de $A$ on peut extraire une sous-suite convergente vers une limite $F \in \mathscr{O}(\Omega)$ et la convergence est uniforme sur les compacts de $\Omega$.

**On rappelle aussi** la formule intégrale pour le coefficient de Taylor $a_n$, $n \geqslant 0$, d'une fonction analytique $f(z)$ dans un disque $D(0,r)$,

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}(0,r')} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad \text{où } r' < r.$$

## Problème 1 : Sur les polynômes d'Hermite

Soit $\sum_{n \geqslant 0} H_n(x) z^n$ le développement en série de la fonction entière de $z$ :

$$\exp\left(2xz - z^2\right),$$

où $x$ est un paramètre complexe.

1. D'après les formules intégrales pour les coefficients de Taylor d'une fonction analytique, on sait que

$$H_n(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\mathscr{C}} \exp\left(2xz - z^2\right) \frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}},$$

où l'on peut choisir pour $\mathscr{C}$ un cercle centré en l'origine. Montrer que

$$H'_{n+1}(x) = 2H_n(x), \quad n \geqslant 0,$$

et en déduire que $H_n$ est un polynôme de degré $n$.

2. Si $\mathscr{C}$ est un cercle de centre 0 de rayon plus grand que $|x|$, montrer que l'on a
$$e^{-x^2}H_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}} \frac{e^{-z^2}dz}{(z+x)^{n+1}}$$
puis que
$$e^{-x^2}H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}\right)_{z=x}.$$
3. Soit $\varphi(x)$ une fonction mesurable vérifiant
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 e^{-x^2}dx < +\infty.$$
Montrer que $\varphi(x) \in L^1(e^{-x^2}dx)$ et que $e^{ax}\varphi(x) \in L^1(e^{-x^2}dx)$, où $a \in \mathbb{R}$.
4. Démontrer que
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-(x-z)^2\right]\varphi(x)dx$$
est une fonction entière de $z$. On pourra utiliser, en le justifiant, que pour $a \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant b$, on a
$$|e^{2zx}| \leqslant e^{2bx} + e^{2ax}.$$
5. On pose
$$\Phi(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(\varphi)z^n.$$
Démontrer la formule
$$a_n(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)e^{-x^2}\varphi(x)dx.$$
6. Pour $\varphi = H_p$, on pose $\Phi = \Phi_p$ . Démontrer les relations
$$a)\ \Phi'_{n+1}(z) = 2\Phi_n(z), \quad b)\ \Phi_n(0) = 0, \quad n \geqslant 1, \quad c)\ \Phi_0(z) = \sqrt{\pi}.$$
En déduire la valeur des fonctions $\Phi_n$.
7. Déduire de ce qui précède les formules
$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} \alpha_p & \text{si} \quad p = q \\ 0 & \text{si} \quad p \neq q \end{cases}$$
les $\alpha_p$ étant des constantes à déterminer.
8. On pose $f(x) = \varphi(x)e^{-x^2}$ pour $\varphi \in L^2(e^{-x^2}dx)$. Montrer que l'on a
$$f \in L^1(dx).$$
9. Que représente la fonction
$$e^{-\pi^2y^2}\Phi(-i\pi y) \quad ?$$
En déduire que si tous les $a_n(\varphi)$ sont nuls, $\varphi$ elle-même est nulle (presque partout).
10. Que peut-on dire pour le système des polynômes $H_n$ ?

## Problème 2 : Extrait du Problème d'Analyse, Agrégation 2015

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$, on note $\mathscr{O}(\Omega)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions holomorphes sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On munit $\mathscr{O}(\Omega)$ de la topologie de convergence uniforme sur tout compact de $\Omega$.

1. Soit log la détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ définie par $\log(1) = 0$ et $x \to \sqrt{x}$, la fonction racine carrée de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On note :

$$\Phi : z \mapsto z \exp\left(\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{2}{z^2}\right)\right).$$

(a) Démontrer que la fonction $\Phi$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ et que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad \Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2} & \text{si } x > \sqrt{2} \\ -\sqrt{x^2 - 2} & \text{si } x < -\sqrt{2} \end{cases}.$$

(b) Soit $C(O,R)$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \lim_{R \to +\infty} \int_{C(O,R)} \frac{\Phi(w) - w}{w - z} \mathrm{d}w = 0.$$

2. On note $G$ la fonction de $\mathscr{O}(\mathbf{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}])$ donnée par

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad G(z) = z - \Phi(z).$$

Prouver que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad \int_{[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2 - t^2}}{z - t} \mathrm{d}t = G(z).$$

**Indication** : On pourra appliquer le théorème de Cauchy à l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{\Phi(w)}{w - z} dw$$

où $\Gamma_{R,\varepsilon}$ est le contour obtenu en réunissant le cercle $C(O,R)$ avec le rectangle dont les sommets sont $\pm(\sqrt{2} + \varepsilon + i\varepsilon)$, $\pm(\sqrt{2} + \varepsilon - i\varepsilon)$.

3. On considère $(\sigma_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit la fonction $H_n$ par

$$H_n : z \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - t} \mathrm{d}\sigma_n(t),$$

pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Supposons que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\forall n \geqslant 1$, $H_n \in \mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ ;

- $(H_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Etablir que la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$ converge dans $\mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$.

**Indication** : On pourra utiliser le théorème d'Ascoli (ou de Montel).

**Indications supplémentaires...** :

1.b. Faire le changement de variable $w = 1/u$.

2. Pour l'intégrale sur le rectangle, il faudra commencer par estimer les limites de $\Phi(z)$ lorsque $z$ s'approche de $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ par en dessus et par en dessous.

3. $(H_n)_{n \geqslant 1}$ converge dans $\mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ signifie que $(H_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction de $\mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ et que la convergence est uniforme sur tous les compacts de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.