Université Aix-Marseille **2019–2020**

Agrégation Mathématiques
Devoir Surveillé Octobre 2019 – 4 heures
Documents et calculatrices non autorisés

On rappelle les deux résultats suivants :

Théorème de Rouché : Soient f et g holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ et soit D un disque ouvert tel que $\overline{D} \subset U$. Si

$$\forall z \in \partial D, \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

alors f et g ont le même nombre de zéros dans D.

Formule pour le résidu d'une fonction holomorphe f ayant un pôle a d'ordre m :

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!} \left.\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\right|_{z=a} (z-a)^m f(z).$$

Exercice 1

On considère l'équation $ze^{a-z} = 1$ où a est un réel fixé > 1.

1) Montrer qu'elle a une seule solution dans $|z| < 1$.

2) Montrer que cette solution est un réel > 0.

Exercice 2

Calculer l'intégrale (convergente)

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(x^2+1)^2} dx$$

par la méthode des résidus. On considèrera le contour constitué de deux demi-cercles dans le demi-plan supérieur, respectivement de rayon R et ε, et des deux segments réels $[-R, -\varepsilon]$ et $[\varepsilon, R]$ les joignant. Les fonctions $\sqrt{z}$ et $\ln(z)$ sont définies en dehors de la coupure constituée du demi-axe imaginaire négatif. Il faudra tenir compte du fait que sur l'axe réel négatif, on a

$$\ln(z) = \ln|z| + i\pi \quad \text{et} \quad \sqrt{z} = i\sqrt{|z|}.$$

Problème : Théorème de Jentzsch

1) Soit la fonction

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$

de la variable complexe z et $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$, $n \in \mathbb{N}$, les sommes partielles de son développement en série en 0 (de rayon de convergence 1).
– Quels sont les zéros de $S_n(z)$?
– Justifier que l'adhérence de l'ensemble réunion des zéros des $S_n(z)$, pour $n \in \mathbb{N}$, est le cercle unité.

Le but du problème est de prouver le résultat suivant, qui généralise ce qui précède à toute série de rayon de convergence fini. On suppose dans la suite que ce rayon vaut 1.

Théorème (Jentzsch, 1918) *Soit* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $a_0 \neq 0$, *une série entière de rayon 1. Soit* E_n *l'ensemble des zéros de sa somme partielle*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad n \geq 0. \tag{1}$$

Alors le cercle unité est dans l'adhérence de $\cup_{n\geq 0} E_n$. [1]

2) Dans toute la suite, on ne considérera que des indices n pour lesquels $a_n \neq 0$. Toutes les limites seront donc prises sur de telles suites d'indices (même si cela n'est pas précisé). Justifier qu'il existe un nombre infini de tels indices.

3) Soit π_n le produit des zéros de S_n. Montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} |\pi_n|^{1/n} = 1.$$

4) Soit $r < 1 < R$, et p_n le nombre de zéros de S_n de modules inférieurs à R.
Montrer que, pour n assez grand,

$$|\pi_n| \geq a^k r^{p_n - k} R^{n-p_n}, \tag{2}$$

où a et k sont des constantes positives. On pourra utiliser le théorème de Rouché, une fois sur le cercle C_r de rayon r (éventuellement $r' > r$ si f s'annule sur C_r), et une fois sur un cercle de rayon $a > 0$ suffisament petit.

5) En déduire que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} = 1.$$

On pourra choisir $r = R^{-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ petit dans l'inégalité (2).

6) Soit l'homographie

$$w = \varphi(z) := \frac{z - \cos\lambda}{1 - z\cos\lambda}, \quad 0 < \lambda < \frac{\pi}{2}.$$

– Quelle est l'image $\varphi(\mathbb{T})$ du cercle unité $\mathbb{T}$ et l'image $\varphi(\mathbb{D})$ du disque unité $\mathbb{D}$?
– Quelle est l'image de l'arc $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$ du cercle unité ?
– Donner la formule pour l'application réciproque $\varphi^{-1}(z)$.

7) Dans la suite, on note $z_{n,k}$, $k = 1, \ldots, n$, les zéros de $S_n(z)$. Les $w_{n,k} := \varphi(z_{n,k})$ sont donc les zéros de la fonction $S_n(\varphi^{-1}(z))$ ou de manière équivalente les zéros du polynôme

$$R_n(z) = (1 + z\cos\lambda)^n S_n(\varphi^{-1}(z)).$$

Quel est le terme constant b_0 de ce polynôme ? Montrer que le coefficient b_1 de degré 1 vaut

$$b_1 = n\cos\lambda S_n(\cos\lambda) + \sin^2\lambda S_n'(\cos\lambda).$$

On rappelle que S_n est donnée par (1). Si l'un des $z_{n,k}$ est égal à $1/\cos\lambda$ alors $w_{n,k} = \infty$. On peut vérifier que cela se traduit par le fait que le polynôme R_n devient de degré strictement plus petit que n, mais cela ne change pas les valeurs de b_0 et b_1.

1. En fait, tout point du cercle unité est un point d'accumulation de $\cup_{n\geq 0} E_n$.

8) On suppose dans la suite que $f(\cos\lambda) \neq 0$. Déduire de la question précédente que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{Re} w_{n,k}}{|w_{n,k}|^2} = -\cos\lambda. \tag{3}$$

On pourra considérer les parties réelles des inverses des $w_{n,k}$ (si $w_{n,k} = \infty$ pour un indice k, le terme correspondant dans la somme (3) est nul).

9) Soient $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ petits. On suppose que la bande

$$1-\varepsilon < |w| < 1+\varepsilon, \qquad -\pi+\lambda-\alpha < \arg w < \pi-\lambda+\alpha,$$

ne contient aucun $w_{n,k}$, $k = 1,\ldots,n$, pour n assez grand. On décompose la somme de la question précédente de la manière suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{Re} w_{n,k}}{|w_{n,k}|^2} = S_1 + S_2 + S_3,$$

où dans S_1, S_2 et S_3 on fait la somme respectivement sur les $w_{n,k}$ tels que

$$|w_{n,k}| \leq 1-\varepsilon, \qquad 1-\varepsilon < |w_{n,k}| < 1+\varepsilon, \quad \text{et} \quad 1+\varepsilon \leq |w_{n,k}|.$$

a) Montrer que $|S_1|$ est bornée par une constante indépendante de n. (on pourra noter, en le justifiant, que le nombre de $w_{n,k}$ tels que $|w_{n,k}| \leq 1-\varepsilon$ devient constant, disons égal à K, pour n grand).
b) En utilisant la question 5), montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|S_3| = 0.$$

On pourra noter q_n le nombre de $w_{n,k}$ tels que $|w_{n,k}| \geq 1+\varepsilon$.
c) Montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_2 < -\frac{\cos(\lambda-\alpha)}{1+\varepsilon}.$$

10) Montrer que les estimations précèdentes contredisent l'équation (3) de la question 8).

11) En déduire que le point 1 est dans l'adérence de $\cup_{n\geq 0} E_n$.

12) En déduire que le cercle unité est dans l'adérence de $\cup_{n\geq 0} E_n$.