Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

PAN Math 206 **Année 2006-2007**

Examen de Probabilité et Analyse Numérique
24 Mai 2007
Durée : 3 heures
Les parties Probabilité et Analyse Numérique sont à rédiger sur des copies séparées

---

Partie II : Analyse numérique
Les calculatrices et les documents sont interdits.

Exercice 1. Résolution d'équations

On se propose d'étudier une méthode numérique pour la résolution de l'équation

$$x + \ln x = 2. \tag{1}$$

1) Montrer que l'équation (1) a une seule racine x^* dans l'intervalle $I = [5/4, 2]$. On pourra utiliser le fait que $\ln(1+x) < x$, $x > 0$.

2) Soit la fonction $g(x) = 2 - \ln x$. Combien la fonction g a-t-elle de points fixes dans l'intervalle I.

3) Montrer que $g(I) \subset I$. On pourra utiliser que $\ln 2 \simeq 0,69\ldots$

4) Montrer que $g(x)$ est contractante et préciser le rapport.

5) Justifier que toute suite de Picard $x_{n+1} = g(x_n)$, $x_0 \in I$, est convergente vers x^* et donner une majoration de l'erreur $|x_n - x^*|$.

6) On pose $e_n = x_n - x^*$. Montrer que

$$e_{n+1} = g'(c)e_n,$$

où c est un réel entre x_n et x^*.

7) En déduire la limite du quotient e_{n+1}/e_n. Quelle est l'ordre de convergence de la méthode ?

8) On cherche à présent une méthode plus rapide. Pour cela, on définit la suite

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n f(x_n), \quad \text{avec} \quad f(x) = x + \ln x - 2.$$

On pose $e_k = x_k - x^*$ et $\delta_k = f(x_k) - f(x^*)$. Calculer e_{k+1} en fonction de e_k, α_k et δ_k.

9) En utilisant un développement de Taylor-Lagrange

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(c_k)}{2}(x^* - x_k)^2,$$

et la relation précédente, montrer que

$$e_{k+1} = (1 - \alpha_k f'(x_k))e_k + \alpha_k \frac{f''(c_k)}{2} e_k^2.$$

10) Comment peut-on choisir α_k pour avoir $e_{k+1} = b_k e_k^2$? Donner la valeur de b_k.

11) En supposant que la méthode converge, quelle est la limite de e_{k+1}/e_k^2 ? Conclure sur l'ordre de la méthode.

12) Expliciter les itérations pour l'équation (1).

Exercice 2. Intégration numérique
On considère l'approximation de l'intégrale $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ obtenue en remplacant f par un certain polynôme interpolant H de manière à ce que

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq M(f) = \int_{-1}^{1} H(x)dx = f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}(f'(-1) - f'(1)).$$

1) On suppose que $f \in C^4([-1,1])$. En admettant que

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(4)}(\alpha)}{4!}(x^2 - 1)^2, \quad \alpha \in [-1,1],$$

donner une majoration de l'erreur $|I(f) - M(f)|$. Comparer cette méthode à la méthode de Simpson.

2) En utilisant le changement de variable $s = \left(\frac{b-a}{2}\right) x + \frac{b+a}{2}$, donner une approximation de l'intégrale $\int_a^b f(s)ds$. On se ramènera à l'intervalle $[-1,1]$ et on appliquera la formule donnée par $M(f)$.

3) On découpe l'intervalle $[-1,1]$ en k sous-intervalles de longueur $2/k$, k entier≥ 1 et on applique l'approximation précédente sur chaque sous-intervalle de la subdivision $x_l = -1 + 2l/k$, $l = 0, \ldots, k$. Donner la valeur approchée de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ obtenue par cette méthode composite.

Exercice 3. Interpolation polynomiale
Le but de cet exercice est de calculer le polynôme H utilisé dans l'exercice 2.

1) Soit $f \in C^1([-1,1])$. En utilisant la formule de Newton, calculer le polynôme d'interpolation P de f aux abscisses 1 et -1.

2) Soit Q le polynôme de degré 1 tel que

$$H(x) = P(x) + (x^2 - 1)Q(x)$$

vérifie

$$H(1) = f(1), \quad H(-1) = f(-1),$$
$$H'(1) = f'(1), \quad H'(-1) = f'(-1).$$

Déterminer $Q(1)$ et $Q(-1)$ puis calculer le polynôme Q.