Université des Sciences et Technologies de Lille

Math206 — Partie Analyse numérique
Licence Sciences — Examen de Juin 2008
Durée : 1 heure 30 — Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (Question de cours) :

On rappelle les hypothèses du théorème du point fixe :
Soit D un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que :
a) $g(D) \subset D$,
b) g est une contraction sur D.

Quelles sont les conclusions du théorème du point fixe ?

Exercice 2 :

On souhaite résoudre l'équation

$$x^3 - 10x + 10 = 0.$$

Pour cela, on considère la suite définie par $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{10}$.

a) Montrer que l'on peut utiliser le théorème du point fixe sur l'intervalle $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ pour prouver que si u_0 se trouve dans cet intervalle alors la suite u_n converge vers une racine de l'équation.

b) Combien l'équation admet-elle de solutions sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

Exercice 3 :

On suppose $\alpha > 0$ et on veut résoudre l'équation $e^{-\alpha x} = x$.

a) Vérifier que cette équation admet une unique solution, notée x_α, dans $\mathbb{R}$.

b) On définit la suite récurrente par $u_{n+1} = e^{-\alpha u_n}$. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. De quel signe sont les éléments suivants de la suite u_n ? On suppose $0 < \alpha < 1$. Vérifier que le théorème du point fixe s'applique sur l'intervalle $[0, +\infty)$ et que la suite u_n converge vers x_α.

T.S.V.P.

Exercice 4 :

a) Vérifier que le polynôme $x^3 + 3x - 7$ s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ et que cette racine appartient à l'intervalle $[0, 2]$.

b) Définir la suite x_n associée à l'algorithme de Newton pour résoudre l'équation

$$x^3 + 3x - 7 = 0. \tag{1}$$

c) Si x_0 est suffisamment proche de la racine, la suite x_n converge-t-elle vers la racine ? Pourquoi ?

d) Que peut-on dire de la vitesse de convergence ?

e) La méthode de la sécante est une modification de la méthode de Newton. En quoi consiste-t-elle ?

f) Quel est son ordre de convergence ?

g) Définir la suite y_n utilisée pour résoudre (1) par la méthode de la sécante.

Exercice 5 :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$. On considère $a \in [0, 1]$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Dans chaque cas, on justifiera la réponse, soit par un exemple bien choisi, soit en donnant un argument de preuve.

a) Si f est croissante, alors la suite (u_n) est croissante.

b) Si (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $[0, 1]$.

c) Si le graphe de f est au-dessus de la droite d'équation $y = x$, alors (u_n) est croissante.

d) Si (u_n) converge vers une limite l et si f est continue en l, alors l est point fixe de f.

e) Si (u_n) converge vers une limite l, alors l est point fixe de f.