Bibliographie

- J-P. Demailly, "Analyse numérique et équations différentielles", EDP Sciences, 1996.
- M. Schatzman, "Analyse numérique, une approche mathématique", Dunod, 2001.

Quelques résultats à connaitre absolument

Formule de Taylor–Lagrange :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction $n+1$ fois dérivable sur I. Alors pour x et $x+h$ dans I, on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + h^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + h^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!},$$

où $\theta \in]0,1[$.

Théorème des valeurs intermédiaires :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une application continue, alors pour tout rel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un rel c entre a et b tel que $f(c) = u$.

Théorème de Rolle :
Soient deux nombres réels a et b tels que $a < b$; et soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que :

$$f(a) = f(b),$$

alors il existe (au moins) un élément c de $]a,b[$ tel que :

$$f'(c) = 0.$$

Théorème des accroissements finis :
C'est un corollaire du théorème précédent. Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe un rel $c \in]a,b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpolation Polynomiale

1. On considère la suite de fonctions $P_n(x) = \cos(n.\text{Arcos}(x))$, $x \in [-1, 1]$.

   (a) Montrer que l'on a la relation
   $$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

   (b) En déduire que $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.

2. Soit $p(x) = a_0 + (x - c_1)[a_1 + \cdots + (x - c_n)(a_n) \cdots]$ un polynôme dans la base de Newton. Montrer que si $c_1 = c_2 = \cdots = c_{r+1}$ alors
   $$p^{(j)}(c_1) = j!a_j, \quad j = 0, \cdots, r.$$

3. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des points réels distincts et f une fonction définie sur $[\min_j x_j, \max_j x_j]$. Montrer que
   $$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)/w'(x_i)$$
   avec $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

4. Montrer que

   (a) la différence divisée d'ordre k d'un polynôme de degré inférieur à k est 0.

   (b) la différence divisée d'ordre k d'un polynôme $p(x)$ de degré $\leq k$ est indépendante des points d'interpolation $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

5. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-2, 3]$.

   (a) A l'aide des tables de valeurs suivantes construire le polynôme $P_4(x)$ de degré au plus 4 qui interpole f aux points x_i.

x_i	2	1	0	-1	-2
$y_i = f(x_i)$	2	5	10	17	2

   (b) Proposer une méthode pour calculer $P_4(3)$ et donner sa valeur.

6. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ points distincts appartenant à l'intervalle $[0, 2]$ et on note $L_i(x)$ le polynôme de Lagrange associé aux abscisses d'interpolation $x_0, x_1, \ldots, x_n$. On suppose de plus que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $x_i = 2 - x_{n-i}$.

   (a) Montrer que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et pour tout $x \in [0, 2]$, $L_i(2 - x) = L_{n-i}(x)$.

   (b) Soit f une fonction définie sur $[0, 2]$ vérifiant la propriété de symétrie suivante : tout $x \in [0, 2]$, $f(2 - x) = f(x)$. Montrer que le polynôme P_n qui interpole f aux abscisses $x_0, x_1, \ldots, x_n$ possède la même propriété de symétrie que f.

   (c) Que signifie cette propriété de symétrie pour le graphe de P_n ?

(d) Que peut-on en conclure pour les coefficients du polynôme P_n dans la base de Newton centrée de points $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 1$?

7. Soit $p_2(x)$ le polynôme de degré ≤ 2 qui interpole la fonction f aux points $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2)$. Montrer que, si $f \in C^3([x_0, x_2])$ alors

$$\forall x \in [x_0, x_2] \quad |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} M,$$

où M est une constante à déterminer.

8. On veut construire une table de valeurs de la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}$ dans l'intervalle $[0, 1]$ pour des points équidistants $x_{i+1} = x_i + h$. Quelle valeur doit prendre h pour garantir 7 chiffres décimaux corrects en faisant une interpolation quadratique ?

9. Supposons que l'on dispose des valeurs de la fonction f dans l'intervalle $[a, b]$ aux points $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \cdots, N$, avec $N = (b - a)/h$. On pose $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, N$ et on définit les différences finies par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Delta^0 f_i &= f_i \ \ \forall i \\ \Delta^k f_i &= \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i \ \forall i \quad \forall k > 0 \end{aligned}$$

(a) Montrer la relation suivante entre différences finies et divisées :

$$f[x_i, \cdots, x_{i+k}] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f_i$$

(b) Montrer que le polynôme de degré $\leq n$ qui interpole f aux points $x_i, \cdots, x_{i+n}$ peut s'écrire

$$p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (s - i - j)}{k!} \Delta^k f_i$$

10. On considère la fonction $f(x) = e^x$ pour $x \in [0, 1]$.

(a) Déterminer le polynôme Q de degré 2 qui interpole $f(x)$ aux points

$$x_0 = 0, \ x_1 = \frac{1}{2}, \ x_3 = 1.$$

(b) Soit maintenant

$$I(a_0, a_1, a_2) = \int_0^1 |e^x - P(x)|^2 dx$$

où $P(x)$ est le polynôme de degré 2

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Déterminer les coefficients a_0, a_1, a_2 qui minimisent $I(a_0, a_1, a_2)$

(c) Comparer P et Q. Conclusion ?

11. **Interpolation d'Hermite**
On se donne $n+1$ abcisses distinctes $x_0, x_1, \cdots, x_n$. On considère les polynômes $U_i(x)$ et $V_i(x)$, $0 \leq i \leq n$, de degré $2n+1$ qui vérifient les conditions suivantes:

$$\begin{array}{llll} U_i(x_k) = \delta_{ik} & ; & U_i'(x_k) = 0 & i,k = 0, \cdots, n \\ V_i(x_k) = 0 & ; & V_i'(x_k) = \delta_{ik} & i,k = 0, \cdots, n \end{array} \tag{1}$$

(a) Quelles conditions d'interpolation vérifie le polynôme

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} U_i(x) y_i + \sum_{i=0}^{n} V_i(x) y_i'?$$

(b) En sachant que les polynômes de la base de Lagrange associée aux noeuds x_i vérifient $L_i(x_k) = \delta_{ik}$, montrer que

$$\begin{array}{rcl} U_i(x) & = & [1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)] \, (L_i(x))^2 \\ V_i(x) & = & (x - x_i)(L_i(x))^2 \end{array}$$

vérifient les conditions (1).

(c) Une déviation entre deux voies de chemin de fer parallèles doit être un polynôme de degré 3 qui unit les positions $(0,0)$ et $(4,2)$ et est tangent dans ces points, aux droites $y = 0$ et $y = 2$ respectivement. Appliquer la formule précédente pour obtenir ce polynôme.

(d) Soit $y(x)$ une fonction dans $C^{2n+2}[a,b]$ et telle que

$$\begin{array}{rcl} y(x_i) & = & y_i \\ y'(x_i) & = & y_i' \quad i = 0, \cdots, n \end{array}$$

avec $x_i \in [a,b]$. On peut montrer que l'erreur que l'on commet quand on remplace $y(x)$ par le polynôme d'interpolation $p(x)$ est donnée par

$$y(x) - p(x) = \frac{y^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} [\pi(x)]^2 \text{ avec } \pi(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

On considère le cas particulier de $n = 1$ et la fonction $y(x) = ...$ Majorer l'erreur $y(x) - p(x)$ dans l'intervalle $[1,2]$.

12. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $I = [0,1]$. Soit $H(x)$ un polynôme de degré ≤ 3 tel que

$$\begin{cases} H(0) = f(0) \\ H(1) = f(1) \\ H'(0) = f'(0) \\ H'(1) = f'(1) \end{cases}$$

(a) Montrer qu'un tel polynôme existe et est unique.

(b) On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur I. On définit la fonction $S(x)$ par la relation

$$f(x) = H(x) + x^2(x-1)^2 S(x).$$

i. Soit x fixé dans I. On introduit la fonction F définie par

$$F(t) = f(t) - H(t) - t^2(t-1)^2 S(x)$$

A. Montrer que $F(t)$ s'annule en (au moins) 3 points distincts que l'on explicitera.

B. Montrer qu'il existe 2 réels distincts t_1^1 et t_2^1 tels que

$$F'(t_1^1) = F'(t_2^1) = 0.$$

(*Indication 1 : on pensera à appliquer le Théorème de Rolle*)

ii. Calculer $F'(t)$, $F'(0)$, $F'(1)$.
En déduire qu'il existe (au moins) 4 réels distincts t_i^2, $i = 1, 2, 3, 4$ tels que

$$F'(t_i^2) = 0, \forall\, i = 1, \cdots, 4.$$

iii. En déduire alors qu'il existe un réel $\xi_x \in I$ tel

$$S(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}.$$

(*Indication 2 : reprendre l'indication 1*)

iv. Donner alors une majoration de l'erreur d'interpolation $|f(x) - H(x)|$.
(*Ind. On pourra utiliser l'inégalité suivante :*

$$\underset{x\in[0,1]}{\mathrm{Max}} \left|x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{n-1}{n}\right)(x-1)\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \ \forall n \geq 1.)$$

(c) On considère les 4 points $(x_i)_{i=1}^4$ définis par

$$x_i = \frac{i-1}{3},\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Soit $P(x)$ le polynôme d'interpolation de Newton de $f(x)$ aux points x_i. La fonction f est toujours supposée de classe $\mathcal{C}^4$ sur I.

i. Donner une majoration de l'erreur d'interpolation $|f(x) - P_n(x)|$.

ii. Comparer cette majoration avec celle obtenue dans la question (b) iv.

Quelques exos que l'on peut faire avec Maple

1. **Visualisation par maple**
   Les polynômes étant les fonctions les plus simples à calculer, on choisit d'approcher des fonctions par des polynômes. Il y a plusieurs façons de faire, dont une est familière: les polynômes de Taylor. On peut aussi utiliser une autre approche, via les *polynômes d'interpolation*. Ces derniers servent plus généralement, lorsqu'on souhaite tracer une courbe lisse passant par des points du plan de coordonnées $(x_1, y_1) \dots (x_{n+1}, y_{n+1})$ données. Dans la suite, les abscisses $x_1, \dots x_{n+1}$ seront toujours supposés distincts.

   (a) Soient deux points de coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Déterminer a_1, a_0 tel que la droite d'équation
   $$y = P_1(x) = a_1(x - x_1) + a_0,$$
   passe par ces points.

   (b) Soient trois points de coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_2(x)$ de degré au plus 2 dont le graphe passe par ces trois points et que ce polynôme peut s'écrire
   $$P_2(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2) + P_1(x).$$
   Déterminer une formule pour a_2. Dans quelles circonstances a-t-on $a_2 = 0$?

   (c) Soient $n + 1$ points de coordonnées $(x_1, y_1) \dots (x_{n+1}, y_{n+1})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n(x)$ de degré au plus n dont le graphe passe par ces points, et qu'on peut écrire
   $$P_n(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_n) + P_{n-1}(x).$$

   (d) Considérons la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$. Soit
   $$x_1 = 0, x_2 = \pi/6, x_2 = \pi/4, x_3 = \pi/3, x_4 = \pi/2,$$
   et $y_i = \sin x_i$. Utiliser un ordinateur pour déterminer les polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 et pour tracer leur graphe. Comparer avec le graphe du sinus. Tracer également les polynômes de Taylor du sinus autour de 0 et autour de $\pi/4$. Lequel de tous ces polynômes semble donner la meilleure approximation du sinus sur l'intervalle considéré ? Etudier les mêmes questions sur l'intervalle $[0, \pi]$, en augmentant bien évidemment le nombre de points.

2. **Schéma d'Horner**
   En utilisant l'algorithme de Horner, écrire une procédure qui effectue le calcul de la valeur d'un polynôme en un point. Ecrire un programme qui, en utilisant la procédure précédente, permet de déterminer les coefficients du développement de Taylor autour d'un point c d'un polynôme donné dans la base canonique.

3. **Formule de Newton**

   (a) Etant donnés une fonction f et n+1 réels distincts x_i, écrire une procédure qui calcule la table des différences divisées de f. On calculera ces différences divisées par colonnes (ou par diagonales ascendantes), en ne gardant que celles utilisées dans le polynôme d'interpolation P_n de f. On utilisera à cet effet un tableau unidimensionnel.

   (b) En utilisant l'algorithme de Horner et l'écriture de $P_n(x)$ dans la base de Newton, écrire une procédure qui permet de calculer la valeur $P_n(\bar{x})$, pour $\bar{x}$ donné.

   (c) Applications. On se place dans l'intervalle $[0,1]$ et on définit les x_i par

   $$x_i = \frac{i-1}{n}, \; i = 1, \cdots, n+1.$$

   On prend $f(x) = x \sin(4\pi x)$.

      i. Vérifier que $P_n(x_i) = f(x_i), \; i = 1, \cdots, n+1$.

      ii. Soit $x \neq x_i, i = 1, \cdots, n+1$. Calculer $f(x) - P_n(x)$ pour différentes valeurs de x et comparer le résultat obtenu avec les estimations d'erreurs du cours.

   (d) Visualisation avec Maple du phénomène de Runge. On se place dans l'intervalle $[a,b] = [-5,5]$ et on définit les points x_i équidistants par

   $$x_i = a + (b-a)\frac{i-1}{n}, \; i = 1, \cdots, n+1$$

   et les points x_i de Chebyshev par

   $$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \, cos\left(\frac{2i-1}{2n+1}\,\pi\right), \; i = 1, \cdots, n+1$$

   On prend $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
   En variant la valeur de n, tracer les graphiques de $f(x)$ et des polynômes d'interpolation (calculés en utilisant la fonction *interp* de Maple) selon les deux choix d'abscisses, équidistantes et de Chebyshev.

4. **Interpolation inverse**
   L'interpolation inverse consiste à, étant donné $\overline{y}$, trouver par interpolation une approximation du point $\overline{x}$ tel que $f(\overline{x}) = \overline{y}$, f étant la fonction tabulée. Si $f(x)$ est continue strictement monotone croissante ou décroissante, alors on peut considérer la table de valeurs $y_i = f(x_i), x_i = g(y_i), \; i = 0, 1, \cdots$ correspondante à la fonction inverse $x = g(y) = f^{-1}(y)$ et interpoler.

   (a) Utiliser le programme précédant et l'interpolation inverse de degré 3 pour approcher la valeur de la plus petite racine positive de

   $$\exp(-x) - \sin x.$$

   (b) Indiquer comment procéder pour obtenir une approximation de la racine de l'équation $f(x) = 0$ vérifiant le critère de précision $|f(\overline{x})| < \epsilon$ en itérant le schéma précédant.