Résolution numérique d'une équation non linéaire

1. Démontrer que toute fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ a au moins un point fixe.
2. Soit la fonction $f(x) = 2x + \cos(x)$. Montrer que f admet au plus une racine dans $\mathbf{R}$.
3. On considère l'équation $0.345^x - \cos x - 0.5 = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique racine de l'équation dans l'intervalle $[0, \pi]$.
   (b) Déterminer par la méthode de la dichotomie un intervalle d'amplitude 10^{-2} qui contient cette racine.
   (c) Proposer une méthode itérative pour le calcul de cette racine avec une précision de 10^{-6}.
4. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que

$$\forall x \in I,\ 0 < M_1 \leq f'(x) \leq M_2\ .$$

   On suppose que f a un zéro sur I. Montrer qu'il est unique. On se propose de calculer numériquement le zéro de f. Pour cela, on introduit la fonction g définie par

$$g(x) = x - \alpha f(x),$$

   où α est un réel strictement positif.
   (a) Montrer que g a un seul point fixe dans I.
   (b) Montrer que l'on peut choisir α tel que g soit fortement contractante sur I (on pourra utiliser le théorème des accroissements finis).
   (c) En déduire que la suite x_n définie par

$$x_0 \text{ donné dans } I \text{ et } x_{n+1} = g(x_n)\ \forall n \geq 0$$

   converge vers le zéro de f.
5. Soit f une fonction lipschitzienne de rapport κ sur $\mathbf{R}$. On suppose que

$$(f(x) - f(y)).(x - y) \leq 0\ \forall x,\ y\ \in \mathbf{R}$$

   (a) On suppose que f a un point fixe $\bar{x}$. Montrer qu'il est unique.
   (b) Soit $\alpha > 0$. On considère la suite x_n définie par

$$x_0 \text{ donné dans } I \text{ et } x_{n+1} = x_n + \alpha(f(x_n) - x_n)\ \forall n \geq 0.$$

i. En remarquant que $x_{n+1} - \bar{x} = (1-\alpha).(x_n - \bar{x}) + \alpha(f(x_n) - \bar{x})$, montrer que , pour $\alpha \in [0,1]$ on a

$$(x_{n+1} - \bar{x})^2 \leq ((1-\alpha)^2 + \alpha^2\kappa^2)(x_n - \bar{x})^2.$$

ii. En déduire un intervalle dans lequel doit être choisi α pour que x_n converge vers $\bar{x}$.

6. On se propose de résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation:

$$x\mathrm{ch}x = 1. \tag{1}$$

Pour cela, on introduit la fonction d'itération g définie sur $\mathbf{R}$ par:

$$g(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}x}$$

et on définit la suite $(u_n)_n$ par:

$$u_0 = 0 \text{ et } u_n = g(u_{n-1}) \text{ pour } n \geq 1.$$

(a) Montrer que $g([0,1]) \subset [0,1]$. En déduire que g admet un point fixe dans $[0,1]$.

(b) Calculer g'.

(c) i. Montrer que pour tout $u \in \mathbf{R}$ on a

$$\frac{u}{1+u^2} \leq \frac{1}{2}$$

ii. En déduire que $\forall x \in \mathbf{R}$

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

(On rappelle que $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$).

(d) En déduire que $(u_n)_n$ est une suite convergente.

7. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x\exp(x-1),$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\begin{cases} x_0 \in [0, +\infty[\\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

(a) Montrer que 0 et 1 sont les seuls points fixes de f.

(b) Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$. Que peut-on en conclure ?

(c) On suppose que $x_0 \in]1, +\infty[$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ est croissante, et que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

(d) On suppose que $x_0 \in [0,1]$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente, préciser la limite et l'ordre de convergence suivant la valeur de x_0.

8. Soit l'équation $f(x) = g(x)$ et on suppose que dans l'intervalle $[a,b]$, f et g sont monotones et dérivables et que l'équation admet une seule racine dans l'intervalle.

   (a) Dans quelles conditions la méthode itérative suivante:

   $$f(x_{k+1}) = g(x_k) \quad k \geq 0, x_0 \text{ donné}$$

   converge-t-elle?

   (b) Appliquer la méthode itérative précédente au calcul de la deuxième racine positive de l'équation $(1+x)\sin x = 1$ avec une précision de 10^{-3}

9. Supposons que l'équation $F(x) = 0$ ait une unique racine x^* dans l'intervalle $[a,b]$. Pour calculer une approximation de cette racine, on se propose d'utiliser la méthode de Picard.

   (a) Soient (x_n) et (y_n) deux suites convergeant vers x^* obtenues par

   $$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \quad x_0 \in [a,b] \\ y_{n+1} &= g(y_n) \quad y_0 \in [a,b] \end{aligned}$$

   avec f et g fortement contractantes. On considère la composition des deux méthodes

   $$z_{n+1} = f(g(z_n)) \text{ avec } z_0 \in [a,b]$$

   Montrer que la suite (z_n) converge plus vite que (x_n) et (y_n).

   (b) Considérons la méthode itérative suivante:

   $$x_{n+1} = h(x_n) = f(f(x_n)) \quad n \geq 0.$$

   Pour $f(x) = \exp(-x)$, et en prenant $x_0 = 0$, effectuer 5 itérations avec la fonction f et 5 itérations avec la fonction h. Comparer et expliquer les résultats en sachant que $x^* = 0.56714329$.

   (c) Montrer que, en composant la méthode itérative de Picard avec la méthode Δ^2 d'Aitken, on obtient la relation de récurrence

   $$x_{n+1} = \frac{x_n f(f(x_n)) - f^2(x_n)}{f(f(x_n)) - 2f(x_n) + x_n} \qquad n = 0, 1, \cdots$$

   (méthode de Steffensen)

   (d) Proposer un algorithme pour implémenter cette méthode et appliquez-le au calcul d'une approximation de x^* avec une erreur inférieure à $\epsilon = 10^{-6}$

10. Soit a un réel strictement positif. On considère la suite

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \text{ pour } n \geq 1, u_0 > 0.$$

(a) Quelles sont les limites possibles de u_n ?

(b) On suppose que $u_0 \in I = [\sqrt{a}, +\infty[$. Montrer qu'alors $u_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire que si $u_0 \in I$ la suite u_n est décroissante. Conclusion ?

(d) On suppose que $u_0 \in I$ dans toute la suite de l'exercice. Soit $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Calculer $f'(x)$. Montrer alors que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x - y| \ \forall\ x, y \in I.$$

(e) Soit l la limite de u_n. Déduire de la question précédente que

$$|u_n - l| < \frac{1}{2^n}|u_0 - l|.$$

(f) On veut montrer que la convergence de u_n vers l est en fait beaucoup plus rapide que ce que laisse penser la dernière inégalité.

i. Montrer que
$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2, \forall n \geq 0.$$

ii. En déduire dans un premier temps que
$$0 < u_{n+1} - \sqrt{a} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(2u_{n-i})^{2^i}}\right)(u_1 - \sqrt{a})^{2^n}, \text{ puis que}$$
$$u_{n+1} - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}(u_1 - \sqrt{a})^{2^n} = 2\sqrt{a}\left(\frac{u_1 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n},$$
et que la convergence est donc très rapide si u_0 est proche de $\sqrt{a}$. Donner un intervalle dans lequel doit être pris u_0.

11. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle I. On suppose qu'il existe un unique élément de I, noté $\bar{x}$, tel que $f(\bar{x}) = 0$. On supposera en outre que $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Dans ce problème, on se propose d'étudier l'ordre et la convergence de la méthode itérative suivante, vouée au calcul numérique de $\bar{x}$:

$$(\mathcal{NA}) \begin{cases} x_0 \text{ donné dans I} \\ \\ \text{Pour } k = 0, \cdots \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k f(x_k) - \beta_k (f(x_k))^2, \end{cases}$$

où α_k et β_k sont des réels qui peuvent dépendre de x_k.

(a) On suppose dans cette question que $\beta_k = 0\ \forall k$.

i. On suppose que α_k est constant, $\alpha_k = \alpha\ \forall k$. Soit Δ la droite de pente $\frac{1}{\alpha_k}(= \frac{1}{\alpha})$ passant par le point $(x_k, f(x_k))$. Déterminer l'intersection de Δ avec l'axe des abscisses. Interpréter géométriquement la méthode.

ii. Même question si $\alpha_k = \dfrac{1}{f'(x_k)}$. Quelle méthode connue retrouve-t-on alors ?

(b) Maintenant les suites α_k et β_k sont quelconques.
On se place dans un voisinage de $\bar{x}$ et on pose $e_k = x_k - \bar{x}$.

i. On pose $\delta_k = f(x_k) - f(\bar{x})$. Etablir une relation entre e_{k+1}, e_k et δ_k.

ii. Ecrire la formule de Taylor Lagrange, à l'ordre 2, appliquée à f au voisinage de x_k.

iii. En déduire que l'on peut écrire

$$e_{k+1} = a_k e_k + b_k (e_k)^2 + c_k (e_k)^3,$$

où c_k, mais pas a_k et b_k, dépend de e_k.

iv. En déduire alors les expressions de α_k et de β_k pour que l'on ait

$$e_{k+1} = c_k (e_k)^3.$$

v. Dire pourquoi ces expressions de α_k et de β_k ont un sens pour x_k suffisamment proche de $\bar{x}$.

(c) A partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, on considère la méthode $(\mathcal{NA})$ avec les expressions de α_k et de β_k trouvées à la question 2 d).
On va à présent établir un résultat de convergence locale pour $(\mathcal{NA})$.

i. A. Montrer qu'il existe un voisinage de $\bar{x}$, $]\bar{x} - \theta, \bar{x} + \theta[$ et une constante $L > 0$, telle que $|f'(y)| \geq L > 0,\ \forall y \in]\bar{x} - \theta, \bar{x} + \theta[$.

B. Soit k fixé. On suppose que $x_k \in]\bar{x} - \theta, \bar{x} + \theta[$, i.e. $|e_k| < \theta$. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|c_k| \leq M,\ \forall x_k \in]\bar{x} - \theta, \bar{x} + \theta[.$$

ii. Montrer qu'on peut choisir θ tel que

$$|e_{k+1}| \leq \kappa |e_k|$$

où $\kappa \in]0, 1[$.

iii. En conclure qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout x_0 dans $J =]\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon[$, la suite x_k définie par $\mathcal{NA}$ est bien définie, demeure dans J, et converge vers $\bar{x}$, cette convergence étant cubique.

12. Soit $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré $m \geq 1$ ayant des zéros réels $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_m$.

(a) Soit

$$R := \max\Big\{1,\ \sum_{j=0}^{m-1} |a_j|\Big\}.$$

En remarquant que
$$|p(x)| \geq |x|^m \cdot \Big(1 - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{|a_j|}{|x|^{m-j}}\Big),$$
montrer que
$$|p(x)| > |x|^m \cdot \Big(1 - \frac{1}{R} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} |a_j|\Big), \quad |x| > R.$$
En déduire que $|\alpha_k| \leq R$ pour $k = 1, ..., m$.

(b) Discutons les zéros de p', p'' :

i. Vérifier qu'il existe $\beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ t.q. $p'(\beta_k) = 0$, $k = 1, ..., m-1$, et qu'il existe $\gamma_k \in]\beta_k, \beta_{k+1}[$ t.q. $p''(\gamma_k) = 0$, $k = 1, ..., m-2$.

ii. Montrer que $p''(x) > 0$ pour $x \geq \alpha_m$ (c'est à dire, p est strictement convexe dans $[\alpha_m, +\infty[$).

(c) Soit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ obtenue par la méthode de Newton pour p, avec $x_0 > R$.

i. Notons par t_a la tangente de p en a. Montrer que $t_a(x) < p(x)$ pour tout $a, x \in]\alpha_m, +\infty[$, $a \neq x$ (on utilisera le théorème des accroissements finis).

ii. Démontrer que $x_n \in]\alpha_m, +\infty[$ implique que $x_{n+1} \in]\alpha_m, x_n[$ (on utilisera le théorème des valeurs intermédiaires). En déduire que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge, avec limite α.

iii. Pourquoi la limite vérifie-t-elle $\alpha = \alpha_m$?

(d) Étudions la complexité de cette méthode.

i. Combien d'opérations arithmétiques nécessite l'évaluation du polynôme p par la méthode de Horner ?

ii. Expliciter une mise en œuvre efficace de la méthode de Newton pour le polynôme p. Combien d'opérations arithmétiques nécessite une itération ?

Quelques exos sur ordinateur

1. Illustration numérique de la formule de la moyenne.
   On se donne

   - $f \in \mathcal{C}([0,1])$.
   - $g \in \mathcal{C}([0,1])$ avec $g(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]$

   On montre, en appliquant le théworème des valeurs intermédiares à la fonction $F(t) = f(t)\int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 f(x)g(x)dx$ qu'il existe au moins un $\xi \in [0,1]$ tel que

   $$\int_0^1 f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_0^1 g(x)dx.$$

   On se propose ici de déterminer numériquement ξ. Pour fixer les idées, on choisit $f(x) = e^x$ et $g(x) = \sin(\pi x)$.

   (a) Construire la fonction F en calculant les intégrales par des formules (composites)
   - des rectangles
   - des trapèzes
   - du point milieux
   - de Simpson

   (b) Déterminer numériquement, pour chaque type de formule d'intégration choisie, une valeur numérique de ξ à 10^{-6} près. On appliquera à cet effet le méthode de Dichotomie à la fonction F.

2. Soit la fonction $f(x) = e^{-x^2} - \tan x$, $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

   (a) Déterminer des intervalles disjoints contenant chacun une racine de l'equation $f(x) = 0$.

   (b) Vérifier que les conditions suffisantes pour la convergence de la méthode de Newton appliquée au calcul de la racine appartenant à l'intervalle $[0.60, 0.61]$ sont satisfaites.

   (c) Faire un programme qui permet, en utilisant simultanement la méthode de Newton et regula falsi, de localiser la racine dans un intervalle d'amplitude 10^{-5}.

3. On se propose de résoudre numériquement l'équation : $f(x) = 0$, dans l'intervalle $I = [a,b]$. On notera x^* la racine de f dans I, que l'on supposera unique. A cet effet, on considère l'algorithme suivant :

   1) Initialisation
   On se donne x_0 et x_1 arbitraires dans I.

   2) Etape d'ordre n
   Pour $n = 1, \cdots$, on définit x_{n+1} en fonction de x_n et de x_{n-1} par

   $$x_{n+1} = x_n - \lambda_n f(x_n),$$

où $\frac{1}{\lambda_n}$ est la pente de la droite passant par les points $(x_n,\ f(x_n)),\quad (x_{n-1},\ f(x_{n-1}))$.

(a) Mettre en œuvre cet algorithme.

(b) Application. Déterminer numériquement une approximation de la racine de la fonction $f(x) = x - 0.2\sin(x) - 0.5$, dans l'intervalle $I = [0.5,\ 1]$.

4. On se propose de résoudre numériquement l'équation : $f(x) = 0$, dans l'intervalle $I = [a, b]$ avec $f(a)f(b) < 0$, f étant une fonction continue sur I. On notera x^* la racine de f dans I, que l'on supposera unique. A cet effet, on considère l'algorithme suivant :

1) Initialisation
On initialise les suites $a_n,\ b_n, x_n, F_n,\ G_n$ par

$$a_0, = a,\ b_0 = b,\ x_0 = a_0 (= a),\ F_0 = f(a_0),\ G_0 = f(b_0).$$

2) Etape d'ordre n
Pour $n = 0, \cdots$, on calcule $a_{n+1},\ b_{n+1}, x_{n+1}, F_{n+1},\ G_{n+1}$ en fonction de $a_n,\ b_n, x_n, F_n,\ G_n$ comme suit :

- *Calcul de x_{n+1}*
$x_{n+1} = \frac{(G_N.a_n - F_N.b_n)}{(G_n - F_n)}$. x_{n+1} est donc l'abscisse du point d'intersection de la droite qui passe par les points $(a_n,\ F_n),\quad (b_n,\ G_n)$ avec l'axe des x.
- *Calcul des autres termes*

$$\text{Si } f(a_n)f(x_{n+1}) \leq 0, \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} \textit{Calcul de } a_{n+1},\ b_{n+1},\ G_{n+1}. \\ \\ a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = x_{n+1},\ G_{n+1} = f(x_{n+1}). \\ \\ \textit{Calcul de } F_{n+1}. \\ \\ \text{Si } f(x_n).f(x_{n+1}) > 0 \text{ alors, } F_{n+1} = \frac{F_n}{2}.\text{Sinon } F_{n+1} = F_n \end{array} \right.$$

On démontre que $\forall n, x^* \in [a_n,\ b_n]$.

(a) Mettre en œuvre cet algorithme.

(b) Application. Déterminer numériquement une approximation de la racine de la fonction

$$f(x) = x - 0.2\sin(x) - 0.5,$$

dans l'intervalle $I = [0.5,\ 1]$, avec une précision de 10^{-1}.