Université de Provence

Analyse Fonctionnelle - Master 1

Feuille 1 : Topologie

Exercice 1 *Montrer qu'une suite de réels positifs qui ne tend pas vers* $+\infty$ *admet une sous-suite convergente.*

Exercice 2 *Montrer que* $\mathbb{N}$ *est fermé dans* $\mathbb{R}$ *(muni de sa valeur absolue).*

Exercice 3 *Montrer qu'une suite de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérence.*

Exercice 4 *Montrer que si* $p_n/q_n \in \mathbb{Q}$ *est une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*, alors* $|p_n| \to +\infty$.

Exercice 5 *Montrer qu'une suite de Cauchy converge si et seulement si elle admet une valeur d'adhérence. En déduire qu'un espace métrique compact est complet.*

Exercice 6
1) Montrer qu'une forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est continue et même uniformément continue sur* $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ *n'est pas uniformément continue sur* $\mathbb{R}$*. Montrer que* $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.
3) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$*, alors il existe des constantes* $a, b > 0$ *telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq a|x| + b.$$

Exercice 7 *Soit* (E, N) *un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte* $B_o(a,r)$ *est la boule fermée* $B_f(a,r)$*. Montrer que l'intérieur d'une boule fermée* $B_f(a,r)$ *est la boule ouverte* $B_o(a,r)$.
Remarque : dans un espace métrique, ces assertions peuvent être fausses.

Exercice 8 *Soit* E *un espace vectoriel normé. Montrer que tout sous-espace vectoriel strict de* E *est d'intérieur vide.*

Exercice 9 *Soit E un espace vectoriel muni de la distance triviale,*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}$$

1) Montrer que les boules ouvertes de rayon 1 sont fermées et réduites à un point.
2) Montrer que les boules fermées de rayon 1 sont ouvertes.
3) Quels sont les ouverts et les fermés de E ?

Exercice 10 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.*
1) Montrer que toutes les normes sont équivalentes sur E.
2) Montrer que les compacts de E sont les fermés bornés.

Exercice 11 *Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.*
1) On considère $N_p(f) := (\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{1/p}$ pour $p = 1, 2$. Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont des normes sur E et qu'elles ne sont pas équivalentes.
2) Quelle est l'adhérence (pour chacune de ces normes) du sous-espace $\mathcal{P}$ des fonctions polynômiales ?
3) Montrer que l'application $P \in (\mathcal{P}, N_\infty) \mapsto P' \in (\mathcal{P}, N_\infty)$ n'est pas continue.

Exercice 12 *(Théorème de Dini) Soit X un espace compact et f_n, $n \geq 0$, une suite de fonctions continues sur X à valeurs réelles. On suppose que la suite est décroissante :*

$$\forall n, \quad f_{n+1} \leq f_n,$$

et que f_n converge simplement vers f continue dans X. Montrer que la convergence est uniforme sur X.