

Analyse Fonctionnelle - Master 1

Feuille 2 : espaces complets

Exercice 1 Montrer que $\mathbb{Z}$ muni de la valeur absolue est un espace complet.

Exercice 2 Soit (E, d) un espace métrique complet et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide. Montrer que $(F, d|_F)$ est complet ssi F est fermé.

Exercice 3 Montrer que tout espace non vide muni de la distance triviale est complet.

Exercice 4 Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer que (E, N) est complet ssi toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 5 Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme sup. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{B} := \{x^n \in E / n \in \mathbb{N}\}$$

est un fermé borné de (E, N_∞) qui n'est pas compact.

Exercice 6 Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme N_1 . En considérant la suite de fonctions f_n telle que $f_n(x) = 0$ sur $[0, 1/2]$, $f_n(x) = n(x - 1/2)$ sur $[1/2, 1/2 + 1/n]$ et $f_n(x) = 1$ sur $[1/2 + 1/n, 1]$, montrer que (E, N_1) n'est pas complet.

Exercice 7 Soit $F \subset E$ un sous-espace non vide d'un espace de Banach (E, N) . On note $\bar{x}$ un élément du quotient E/F et

$$\overline{N}(\bar{x}) := \inf_{y \in \bar{x}} N(y).$$

1) Montrer que $\overline{N}$ est une semi-norme et que c'est une norme ssi F est fermé.

2) Montrer, lorsque F est fermé, que $(E/F, \overline{N})$ est un Banach.

Exercice 8 On considère l'espace $E = L^1([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions Lebesgue-intégrables, muni de la norme $N_1(f) = \int_0^1 |f|$ et $F = L^2([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $N_2(f) = (\int_0^1 |f|^2)^{1/2}$. On rappelle que (E, N_1) et (F, N_2) sont des espaces complets.

1) Montrer que $F \subset E$.

2) Montrer que (F, N_1) n'est pas complet.

Exercice 9 Soit X une partie dense d'un espace métrique E , et f une application uniformément continue de X dans un espace métrique complet F .

1) Montrer qu'il existe une unique application continue g de E dans F qui prolonge f .

2) Montrer que g est uniformément continue.

3) Si on suppose seulement f continue, peut-on toujours assurer l'existence d'un prolongement g continue ?

Exercice 10 Soit (E, d) un espace métrique. On note $\delta := d/(1 + d)$.

1) Montrer que δ est une distance sur E . Est-elle équivalente à d ?

2) Montrer que (E, d) est complet ssi (E, δ) l'est.

Exercice 11 Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Montrer que $f_n(x) = x^n$ définit une suite d'éléments de (E, N_∞) qui n'est pas de Cauchy. Est-elle de Cauchy dans (E, N_1) ? (E, N_2) ?

Exercice 12 Soit X un ensemble quelconque et soit F un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ muni de la norme du sup. Montrer qu'une suite d'éléments de F qui converge simplement converge uniformément.